Aufgabe 1 *(Sektorformel von Leibniz)*
Sei $c : I = [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = r(t)\,(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$ mit $r, \varphi \in C^1(I)$, $\varphi' > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$. Zeigen Sie: die vom Ortsvektor überstrichene Fläche ist

$$A = \frac{1}{2}\int_I r^2\varphi'.$$

Aufgabe 2 *(Newtonpotential einer rotationssymmetrischen Funktion)*
Sei $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : r_1 < |x| < r_2\}$. Zeigen Sie für eine rotationsinvariante Funktion $f \in L^1(A)$, das heißt $f(Tx) = f(x)$ für alle $x \in A$, $T \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$, die Formel

$$\int_A \frac{f(y)}{|x-y|}\,dy = \begin{cases} \text{konst.} & \text{für } |x| < r_1 \\ m/|x| & \text{für } |x| > r_2. \end{cases}$$

Dabei ist $m = \int_A f(x)\,dx$.

Aufgabe 3 *(Konforme Diffeomorphismen)*
Sei $\Phi \in C^\infty(U,V)$ konformer Diffeomorphismus, d.h. das induzierte Skalarprodukt ist von der Form $g = \lambda^2\langle\cdot,\cdot\rangle$ mit $\lambda : U \to (0,\infty)$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $\Delta_g u = \dfrac{1}{\lambda^2}\left(\Delta u + (n-2)\langle Du, D\log\lambda\rangle\right)$

(b) $\Delta(\lambda^{\frac{n-2}{2}}) = 0 \quad\Rightarrow\quad \Delta(\lambda^{\frac{n-2}{2}}u) = \lambda^{\frac{n+2}{2}}\Delta_g u$

(c) $\Phi(x) = \dfrac{x}{|x|^2} \quad\Rightarrow\quad (\Delta v)\circ\Phi = |x|^{2+n}\,\Delta(|x|^{2-n}(v\circ\Phi))$.

Insbesondere ist mit v auch $|x|^{2-n}v\circ\Phi$ harmonisch.

Aufgabe 4 *(allgemeine Transformationsformel)*
Sei μ äußeres Maß auf X, $\phi : X \to Y$ und $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$. Ist dann $g\circ\phi$ μ-messbar, so ist g auch $\phi(\mu)$-messbar und es gilt

$$\int_Y g\,d(\phi(\mu)) = \int_X g\circ\phi\,d\mu,$$

falls eines der beiden Integrale existiert.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Freitag, dem 25.01.2008, bis 10.15 Uhr.