Aufgabe 1 *(Schwarzscher Stiefel)*
Gegeben sei der Zylindermantel $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ mit der Parametrisierung $\varphi : [0,2\pi] \times [0,1] \to Z$, $\varphi(\vartheta, z) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, z)$. Um seinen Flächeninhalt zu approximieren, wählen wir Unterteilungspunkte

$$p_{k,l} = \left(\frac{2\pi k}{2m}, \frac{l}{2n}\right) \quad \text{mit } 0 \leq k \leq 2m,\ 0 \leq l \leq 2n,\ k+l \text{ gerade}$$

und zerlegen so das Parametergebiet in Dreiecke mit Basis der Länge $2\pi/m$ auf den Strecken $z = l/(2n)$ und Höhe $1/(2n)$. Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der zugehörigen Bilddreiecke und untersuchen den Grenzwert für $m, n \to \infty$.

Aufgabe 2 *(Ein Oberflächenintegral)*
Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{S}^2} x^2 y^2 z^2 \, d\mu_{\mathbb{S}^2}.$$

Aufgabe 3 *(Immersion, aber keine Einbettung)*
Geben Sie eine Abbildung an, die eine injektive Immersion ist, aber kein Homeomorphismus auf ihr Bild.

Aufgabe 4 *(Torus im $\mathbb{R}^4$)*
Sei $0 < \varrho < 1$ und $T_\varrho = \{(z,w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : |z|^2 = \varrho^2,\ |w|^2 = 1 - \varrho^2\}$. Zeigen Sie, dass T_ϱ eine 2-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ ist, und berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Freitag, dem 01.02.2008, bis 10.15 Uhr.