

Aufgabe 1 (*Eigenwerte des Laplace-Operators*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit C^1 -Rand. Für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $u \neq 0$, Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie $\lambda > 0$. Was gilt für die Randbedingung $\partial_\nu u = 0$ auf $\partial\Omega$?

Aufgabe 2 (*Indexformel*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit C^1 -Rand und $x_0 \notin \partial\Omega$. Rechnen Sie nach, dass mit $\omega_{n-1} = \mu_{\mathbb{S}^{n-1}}(\mathbb{S}^{n-1})$ gilt:

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\partial\Omega} \left\langle \frac{x - x_0}{|x - x_0|^n}, \nu(x) \right\rangle d\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_0 \in \Omega, \\ 0 & \text{falls } x_0 \notin \Omega. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (*Archimedisches Prinzip*)

Der untere Halbraum $\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 < 0\}$ sei mit einer Flüssigkeit der konstanten Dichte $\varrho > 0$ ausgefüllt. Dann wirkt auf einen Körper $\Omega \subset \mathbb{H}^3$ an der Stelle $x \in \partial\Omega$ der vektorielle Druck $p(x) = \varrho x_3 \nu(x)$, wobei ν die äußere Normale von Ω ist. Berechnen Sie den Auftrieb

$$A = \int_{\partial\Omega} p(x) d\mu(x).$$

Aufgabe 4 (*Kegel*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit C^1 -Rand und

$$K(\Omega) = \{y(x, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y > 0, x \in \Omega\}.$$

Überlegen Sie, ob $K(\Omega)$ einen C^1 -Rand besitzt.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Freitag, dem 08.02.2008, bis 10.15 Uhr.

Dies ist das letzte Aufgabenblatt :-) **Die Klausur findet am Freitag, dem 15.02.2008, ab 14.00 Uhr im HS Rundbau, Albertstr. 21a, statt.** Die Klausurdauer beträgt etwa 3 Stunden. Als Hilfsmittel zur Klausur ist nur ein mit eigenen Notizen beschriebenes DIN A4 Blatt zugelassen, sonst nichts (keine Lupe). Papier wird gestellt, bitte Stifte und einen Studierendenausweis mitbringen.