Aufgabe 1 *(Eigenwerte des Laplace-Operators)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit C^1-Rand. Für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $u \neq 0$, Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda\, u \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie $\lambda > 0$. Was gilt für die Randbedingung $\partial_\nu u = 0$ auf $\partial\Omega$?

Aufgabe 2 *(Indexformel)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit C^1-Rand und $x_0 \notin \partial\Omega$. Rechnen Sie nach, dass mit $\omega_{n-1} = \mu_{\mathbb{S}^{n-1}}(\mathbb{S}^{n-1})$ gilt:

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\partial\Omega} \Big\langle \frac{x - x_0}{|x - x_0|^n}\,,\, \nu(x) \Big\rangle \, d\mu(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } x_0 \in \Omega, \\ 0 & \text{falls } x_0 \notin \Omega. \end{cases}$$

Aufgabe 3 *(Archimedisches Prinzip)*
Der untere Halbraum $\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 < 0\}$ sei mit einer Flüssigkeit der konstanten Dichte $\varrho > 0$ ausgefüllt. Dann wirkt auf einen Körper $\Omega \subset \mathbb{H}^3$ an der Stelle $x \in \partial\Omega$ der vektorielle Druck $p(x) = \varrho\, x_3\, \nu(x)$, wobei ν die äußere Normale von Ω ist. Berechnen Sie den Auftrieb

$$A = \int_{\partial\Omega} p(x)\, d\mu(x).$$

Aufgabe 4 *(Kegel)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit C^1-Rand und

$$K(\Omega) \;=\; \{y\,(x,1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y > 0,\, x \in \Omega\}.$$

Überlegen Sie, ob $K(\Omega)$ einen C^1-Rand besitzt.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Freitag, dem 08.02.2008, bis 10.15 Uhr.

Dies ist das letzte Aufgabenblatt :-) **Die Klausur findet am Freitag, dem 15.02.2008, ab 14.00 Uhr im HS Rundbau, Albertstr. 21a, statt.** *Die Klausurdauer beträgt etwa 3 Stunden. Als Hilfsmittel zur Klausur ist nur ein mit eigenen Notizen beschriebenes DIN A4 Blatt zugelassen, sonst nichts (keine Lupe). Papier wird gestellt, bitte Stifte und einen* **Studierendenausweis** *mitbringen.*