Aufgabe 1 *(Urbilder von Erzeugern)*
Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen Mengen und $\mathcal{E} \subset 2^Y$ ein beliebiges Mengensystem. Zeigen Sie

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})).$$

Hinweis: Zum Nachweis der Inklusion „$\subset$“ setzen Sie $\mathcal{B} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})\}$ und betrachten $f^{-1}(\mathcal{B})$ *(Good Sets Principle).*

Aufgabe 2 *(Konstruktion von äußeren Maßen)*
Seien $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ äußere Maße auf X und $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset [0, \infty]$. Zeigen Sie, dass durch

$$\mu(A) := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \, \mu_i(A), \quad A \subset X,$$

wieder ein äußeres Maß auf X definiert ist und dass Mengen, die μ_i-messbar sind für alle $i \in \mathbb{N}$, auch μ-messbar sind.

Aufgabe 3 *(Cantormenge)*
Die Cantormenge C ist die Menge aller $x \in [0, 1]$, die eine triadische Enwicklung $x = 0, k_1k_2 \ldots := \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cdot 3^{-j}$ erlauben mit Ziffern $k_j \in \{0, 2\}$. Zeigen Sie:

(a) Sei C_n die Menge der $x = 0, k_1k_2 \ldots \in [0, 1]$ mit $k_j \in \{0, 2\}$ für $j = 1, \ldots, n$ und $C_0 = [0, 1]$. Dann ist C_{n+1} die disjunkte Vereinigung

$$C_{n+1} = \left\{\frac{1}{3}x : x \in C_n\right\} \cup \left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x : x \in C_n\right\}.$$

(b) $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$.

(c) C ist abgeschlossen und überabzählbar.

(d) C hat Jordan-Inhalt Null und ist nirgends dicht.

Aufgabe 4 *(Ein vollständiger metrischer Raum)*
Seien $\mu : 2^X \to [0, +\infty)$ ein äußeres Maß und $\mathcal{M}$ das System der μ-messbaren Mengen. Wir setzen wie in Aufgabe 2, Serie 1,

$$\mathrm{d}\,(A, B) := \mu(A \triangle B) \quad \text{und} \quad A \sim B \Leftrightarrow \mathrm{d}\,(A, B) = 0.$$

Beweisen Sie: Durch die Metrik $\mathrm{d}\,(\cdot, \cdot)$ wird $\mathcal{M}/\!\sim$ ein vollständiger metrischer Raum, d.h. jede Cauchyfolge konvergiert.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Freitag, dem 09.11.2007, bis 9.15 Uhr.