Aufgabe 1 *(Vervollständigung)*
Sei λ ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A} \subset 2^X$ und

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{A}} &:= \{D \subset X : \exists C, E \in \mathcal{A} \text{ mit } C \subset D \subset E \text{ und } \lambda(E \backslash C) = 0\},\\ \overline{\lambda}(D) &:= \lambda(C) \quad (= \lambda(E)) \quad \text{für } D \in \overline{\mathcal{A}} \text{ wie oben.}\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie: $\overline{\mathcal{A}}$ ist eine σ-Algebra mit $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$ und $\overline{\lambda} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ ist ein wohldefiniertes, vollständiges Maß mit $\overline{\lambda}|_{\mathcal{A}} = \lambda$.

(b) Ist $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ ein vollständiges Maß mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ und $\mu|_{\mathcal{A}} = \lambda$, dann ist $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{B}$ und $\mu|_{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\lambda}$.

Aufgabe 2 *(Ein Maß)*
Sei $\mathcal{A}$ das System aller Mengen $A \subset \mathbb{R}$, für die A oder $\mathbb{R} \backslash A$ abzählbar ist, und

$$\lambda(A) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } A \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{, falls } \mathbb{R} \backslash A \text{ abzählbar.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und λ ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Caratheodory-Fortsetzung μ von λ und das System der μ-messbaren Mengen.

(c) Ist μ ein Inhalt auf $2^{\mathbb{R}}$?

Aufgabe 3 *(Zur Kompaktheit)*
Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es ein $\lambda > 0$, so dass zu jeder Teilmenge $A \subset K$ mit $\operatorname{diam}(A) \leq \lambda$ ein $i \in I$ mit $A \subset U_i$ existiert.

Aufgabe 4 *(Lebesgue-Stieltjes-Maß)*

(a) Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und rechtsseitig stetig und $\lambda_F : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ mit $\lambda_F((a, b]) := F(b) - F(a)$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, der zugehörige Stieltjes-Inhalt auf dem Halbring $\mathcal{I}$ der nach links halboffenen Intervalle (siehe Anwesenheitsaufgabe 3, Serie 1). Dann ist λ_F ein Prämaß.

(b) Die Caratheodory-Fortsetzung von λ_F heißt das *Lebesgue-Stieltjes-Maß* μ_F auf $\mathbb{R}$. Berechnen Sie $\mu_F((a, b])$, $\mu_F((a, b))$, $\mu_F([a, b])$ und $\mu_F([a, b))$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Freitag, dem 16.11.2007, bis 10.15 Uhr.