Aufgabe 1 *(Borelmengen im $\mathbb{R}^n$)*
Sei $\mathcal{B}^n$ das System der Borelmengen im $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Zeigen Sie $\mathcal{B}^p \times \mathcal{B}^q \subset \mathcal{B}^n$.

Aufgabe 2 *(Kritische Werte)*
Sei $I = (a, b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Für $f \in C^1(I)$ sei $E := \{x \in I : f'(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $f(E)$ eine $\mathcal{L}^1$-Nullmenge ist.

Aufgabe 3 *(Cantorfunktion)*
Sei $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ die Cantormenge. Dabei ist C_n die Menge der $x \in [0, 1]$, die eine triadische Entwicklung $x = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \, 3^{-j}$ erlauben mit $k_j \in \{0, 2\}$ für $j = 1, \ldots, n$ (siehe Aufgabe 3, Serie 2).

(a) Konstruieren Sie eine stetige, monoton wachsende und surjektive Funktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit
$$F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{2} \, 2^{-j} \quad \text{für } x = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \, 3^{-j} \in C.$$

(b) Sei μ_F das zu der Funktion F gehörige Lebesgue-Stieltjes-Maß (siehe Aufgabe 4, Serie 3). Zeigen Sie $\mu_F(\mathbb{R} \backslash C) = 0$ und $\mu_F(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Interpretation: Die „Ableitung“ der Cantorfunktion F ist ein Maß, das auf der $\mathcal{L}^1$-Nullmenge C lebt und keinen Diracanteil hat.

Aufgabe 4 *(Konvexe Mengen)*
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge mit $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$ und $\mathcal{L}^n(K) < \infty$. Zeigen Sie, dass K beschränkt ist.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Freitag, dem 23.11.2007, bis 10.15 Uhr.