Aufgabe 1 *(Integral-Vergleichskriterium)*
Eine monoton fallende, beschränkte Funktion $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ ist genau dann integrierbar bzgl. $\mathcal{L}^1$ auf $(0, \infty)$, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert.

Aufgabe 2 *(Zu den L^p-Normen)*
Sind $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $\mu(X) < \infty$, dann gelten:

(a) Für $1 \leq p < q \leq \infty$ ist $\|f\|_{L^p} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q}$.

(b) $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$.

(c) Für $f > 0$ ist $\lim_{p\to-\infty} \|f\|_{L^p} = \operatorname{ess\,inf} f$.

Hinweis: Definieren Sie das *wesentliche Infimum* $\operatorname{ess\,inf} f$.

Aufgabe 3 *(Newtonpotential)*
Der Träger einer Funktion $\varrho \in C^0(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge $\operatorname{spt} \varrho = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varrho(x) \neq 0\}}$. Betrachten Sie für $n \geq 3$ und $\operatorname{spt} \varrho$ kompakt die Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad u(x) = \int \frac{\varrho(y)}{|x-y|^{n-2}} \, d\mathcal{L}^n(y).$$

Zeigen Sie, dass u auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert sowie auf $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \operatorname{spt} \varrho$ unendlich oft differenzierbar ist und dort die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

Aufgabe 4 *(Gaußintegral)*
Beweisen Sie die Gleichung $\int_0^\infty e^{-t^2} \, dt = \sqrt{\pi}/2$, indem Sie die Formel

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2n+1}$$

herleiten und den Grenzübergang $n \to \infty$ untersuchen.
Hinweis: Verwenden Sie das Wallis-Produkt (Analysis 1, Kapitel 5, Beispiel 2.3).

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Freitag, dem 14.12.2007, bis 10.15 Uhr.