Übungsaufgaben zur Analysis III — WS 07/08, Serie 8
Prof. Dr. E. Kuwert, A. Windel — 14. Dezember 2007
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/AnaIII/

Aufgabe 1 *(Jensen-Ungleichung)*
Sei μ ein Maß auf X mit $\mu(X) = 1$ und $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ konvex. Zeigen Sie für $f \in L^1(\mu)$ die Ungleichung

$$\Phi\left(\int f\, d\mu\right) \leq \int \Phi \circ f\, d\mu.$$

Hinweis: Sie können die folgende Tatsache für konvexe Funktionen ohne Begründung verwenden: $\Phi(t) \geq \Phi(s) + \Phi'(s)(t-s)$ für $s, t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 *(L^p-Konvergenz bei Translationen)*
Für $h \in \mathbb{R}^n$ sei $\tau_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau_h(x) = x + h$. Beweisen Sie für $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\lim_{h \to 0} \|f \circ \tau_h - f\|_{L^p} \;=\; 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass $C^0_c(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist.

Aufgabe 3 *(Zur Hölder- und Minkowksi-Ungleichung)*
Es seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Für messbare Funktionen f, g gilt in der Hölder-Ungleichung

$$\int |fg|\, d\mu \;\leq\; \|f\|_{L^p}\, \|g\|_{L^q}$$

Gleichheit genau dann, wenn $|f|^p, |g|^q \in \{\lambda\, h : \lambda \geq 0\}$ für eine Funktion $h \geq 0$.

(b) Für $f, g \in L^p(\mu)$ gilt in der Minkowski-Ungleichung

$$\|f + g\|_{L^p} \;\leq\; \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

Gleichheit genau dann, wenn $f, g \in \{\lambda\, h : \lambda \geq 0\}$ für eine Funktion h.

Aufgabe 4 *(Zur majorisierten Konvergenz)*
Für $1 \leq p < \infty$ seien $f_k, f \in L^p(\mu)$ mit $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ für μ-fast-alle $x \in X$. Weiter gebe es integrierbare Funktionen $g_k, g : X \to [0, \infty]$ mit $|f_k|^p \leq g_k$ μ-fast-überall für alle $k \in \mathbb{N}$ und $g_k \to g$ in $L^1(\mu)$ für $k \to \infty$. Dann gilt $f_k \to f$ in $L^p(\mu)$ für $k \to \infty$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Freitag, dem 21.12.2007, bis 10.15 Uhr.