Aufgabe 1 *(Interpolationsungleichung)*
Sei μ ein Maß auf X und $1 \leq p < r < q \leq \infty$. Beweisen Sie

$$\|f\|_{L^r} \;\leq\; \|f\|_{L^p}^{\lambda}\,\|f\|_{L^q}^{1-\lambda} \quad \text{für } \lambda = \frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Insbesondere gilt $L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \subset L^r(\mu)$.

Aufgabe 2 *(Separabilität von L^p)*
Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare Teilmenge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, die dicht in X ist. Zeigen Sie, dass für $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen der Raum $L^p(\Omega)$ separabel ist.
Hinweis: Verwenden Sie, dass $C^0_c(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ ist.

Aufgabe 3 *(Volumen eines Simplex)*
Berechnen Sie das Volumen des n-dimensionalen Simplex

$$S_n \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \text{ und } x_1 + \ldots + x_n \leq 1\}.$$

Aufgabe 4 *(Volumen eines Torus)*
Sei $0 < \varrho < R$. Der Volltorus $T \subset \mathbb{R}^3$ entsteht durch Rotation einer Kreisscheibe D mit Radius ϱ um eine Achse, wobei der Mittelpunkt von D den Abstand R zu der Rotationsachse besitzt. Berechnen Sie das Volumen von T.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Freitag, dem 11.01.2008, bis 10.15 Uhr.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch ins neue Jahr!