

Aufgabe 1 (*Wiederholung*)

Stellen Sie die für das weitere Verständnis essentiellen Begriffe und Sätze in präziser Formulierung zusammen: Konvergenz bzw. Divergenz einer Zahlenfolge, bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$, Cauchyfolge, Vollständigkeit, Intervallschachtelung, Auswahl-
satz von Bolzano-Weierstraß, Supremum/Infimum, Konvergenzkriterien für Reihen, Konvergenz in \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C} , Stetigkeit, Grenzwert von Funktionen, Ableitung. Finden Sie Beispiele bzw. Gegenbeispiele, die die Begriffe/Aussagen erläutern bzw. abgrenzen. Diskutieren Sie die Beispiele in der nächsten Übungsgruppe.

Aufgabe 2 (*Grenzwerte*)

Beweisen Sie Satz 7.4 (Folgendefinition des Grenzwerts) und Satz 7.5 (Rechenregeln für Grenzwerte) der Vorlesung. Finden Sie auch hier Beispiele.

Aufgabe 3 (*Nullstellen von Polynomen*)

Zeigen Sie, dass ein reelles Polynom von ungeradem Grad mindestens eine reelle Nullstelle hat.

Aufgabe 4 (*Umkehrfunktion und Stetigkeit*)

Zeigen Sie, dass durch $f(x) = x - \frac{x}{|x|}$ eine stetige und bijektive Abbildung von $[-1, 0) \cup (0, 1]$ auf das Intervall $(-1, 1)$ gegeben ist, deren Umkehrfunktion aber nicht auf $(-1, 1)$ stetig ist.

Aufgabe 5 (*Eine sprunghafte Funktion*)

An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist folgende Funktion stetig:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p, q \text{ teilerfremd.} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 6 (*Badische Eisenbahn*)

Eine Regiobahn fährt von Freiburg nach Donaueschingen. Zwei Studenten, erschöpft von der Analysis-Vorlesung, sitzen im Zug nach Hause und wollen gerade anfangen, die Weihnachtsaufgaben zu rechnen. Sie: „Ich wette, wenn ich meinen Bleistift im richtigen Winkel auf den Tisch stelle, dann schaffe ich es, dass er bis Donaueschingen nicht ganz umgekippt ist!“ Er: „Wenn er mal umgekippt ist, bleibt er jedenfalls liegen.“ „Stimmt, und seine Bewegung hängt natürlich stetig vom Anfangswinkel ab.“ Wird sie die Wette gewinnen?

Keine schriftliche Abgabe