Aufgabe 1 *(Berechnung von Grenzwerten)*
Prüfen Sie, ob die nachstehenden Grenzwerte existieren (mit Beweis).

(a) $\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$ für $x \to 0$,

(b) $\dfrac{x-1}{x+1}$ für $x \to -1$,

(c) $\dfrac{z^m-1}{z^n-1}$ für $z \to 1$ $\quad (z \in \mathbb{C},\, m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0)$.

Aufgabe 2 *(Differentiation von bilinearen Termen)*
Sei $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $(u,v) \mapsto B(u,v)$, bilinear, das heißt mit den Darstellungen $x = \sum_{i=1}^m x_i a_i$, $y = \sum_{j=1}^n y_j b_j$ bezüglich der jeweiligen Standardbasis gilt

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j\, B(a_i, b_j).$$

Zeigen Sie für differenzierbare $u : I \to \mathbb{R}^m$, $v : I \to \mathbb{R}^n$ die Produktregel

$$B(u,v)' = B(u',v) + B(u,v').$$

Schreiben Sie die Regel in folgenden Spezialfällen auf:

1. $B(u,v) = \langle u,v\rangle$ (Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$),
2. $B(u,v) = uv$ (komplexe Multiplikation auf $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$),
3. $B(u,v) = u \times v$ (Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$),

Aufgabe 3 *(Gerade und ungerade Funktionen)*
Sei $I = (-a,a) \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt gerade (ungerade), wenn gilt:

$$f(-x) = f(x) \qquad (\text{bzw. } f(-x) = -f(x)) \qquad \text{für alle } x \in I.$$

Sei f differenzierbar. Zeigen Sie: Ist f gerade (ungerade), so ist f' ungerade (gerade). Gelten auch die Umkehrungen?

Aufgabe 4 *(Hebbarer Punkt für f')*
Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in I$ stetig, auf $I\backslash\{x_0\}$ differenzierbar und es gelte $\lim_{x\to x_0} f'(x) = a$. Zeigen Sie $f'(x_0) = a$.

Aufgabe 5 *(Eine parametrisierte Kurve)*

(a) Begründen Sie, dass die Abbildung $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t^2, t^3)$, differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

(b) Ist der normierte Tangentenvektor $\tau = c'/\|c'\|$ stetig im Punkt $t = 0$?

(c) Zeichnen Sie einen Ausschnitt von $c(\mathbb{R})$, der den Punkt $c(0)$ enthält.

Aufgabe 6 *(Höhere Ableitung und Polynome)*
Zeigen Sie für $f : I = (a, b) \to \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Äquivalenz folgender Ausagen:

(a) f ist Polynom vom Grad höchstens $n - 1$, das heißt es gibt $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ für alle $x \in I$.

(b) Es gilt $f^{(n)} = 0$ auf I.

Dieses Blatt enthält 8 Bonuspunkte, d.h. wie gewohnt haben Sie mit 16 Punkten 100% der erforderlichen Punktzahl erreicht.
Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Nummer Ihrer Übungsgruppe und den Namen Ihres Tutors auf Ihre Abgabe. Abgabe ist am Montag, 18.1.2016 bis 14:00 in den Briefkästen im Keller des mathematischen Instituts.