
Aufgabe 1 *(Hyperbolische Funktionen)*
Die Funktionen $\cosh, \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*Cosinus* bzw. *Sinus hyperbolicus*) sind

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(1) Zeigen Sie $\cosh' = \sinh$ und $\sinh' = \cosh$, sowie $\cosh(0) = 1$, $\sinh(0) = 0$.

(2) Folgern Sie aus (1), dass $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(3) Begründen Sie, dass die Funktion sinh auf $\mathbb{R}$ eine differenzierbare Umkehrfunktion Arsinh hat, den *Area sinus hyperbolicus*.

(4) Zeigen Sie $\operatorname{Arsinh} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

Bemerkung. Die hängende Kette im Treppenhaus des Instituts ist (bis auf Skalierung) Graph der Funktion cosh.

Aufgabe 2 *(Differentiationsregeln)*
Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen (mit Angabe des Definitionsbereichs):

(a) $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

(b) $f(x) = x^\alpha \log(x)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $f(x) = x^{(x^x)}$.

(d) $f(x) = (x^x)^x$.

Aufgabe 3 *(Konkavität des Logarithmus)*

(a) Zeigen Sie, dass $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ konkav ist (also $-\log$ konvex).

(b) Seien $1 < p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$. Verwenden Sie (a) um zu zeigen:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \quad \text{für alle } x, y \geq 0.$$

Aufgabe 4 *(Ein Extremalproblem)*
Franny steht am Punkt $P = (x_1, y_1)$ und will möglichst schnell zu Joey, am Punkt $Q = (x_2, y_2)$, wobei $y_{1,2} > 0$. Aber vorher braucht sie noch einen Drink, den sie überall an der Theke $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ kriegen kann.

(a) Wieviel Zeit braucht sie, wenn sie den Drink an der Stelle x abholt (wir nehmen Geschwindigkeit Eins an).

(b) Leiten Sie eine notwendige Bedingung für einen optimalen Punkt x_0 her. Was besagt die Bedingung geometrisch?

(c) Begründen Sie, dass ein optimaler Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert.

(d) Es sollte berücksichtigt werden, dass Franny mit dem Drink nur halb so schnell laufen kann wie ohne. Ändert sich der optimale Punkt?

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Nummer Ihrer Übungsgruppe und den Namen Ihres Tutors auf Ihre Abgabe. Abgabe ist am Montag, 25.01.2016 bis 14:00 in den Briefkästen im Keller des mathematischen Instituts.