Aufgabe 1 *(Punktweise Konvergenz)*
Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert der Folge

$$f_n : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Konvergiert die Folge gleichmäßig?

Aufgabe 2 *(Zum Konvergenzradius)*
Bestimmen Sie für jede der folgenden Potenzreihen den Konvergenzradius:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^{n-2}}{\sqrt{n!}} z^n$

(c) $1 + 3z + 5z^2 + 7z^3 + \ldots$ (d) $1 + \frac{1}{2}z + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}z^3 + \ldots.$

Aufgabe 3 *(Gleichmäßige Konvergenz)*
Prüfen Sie auf gleichmäßige Konvergenz, sowie auf gleichmäßige Konvergenz der Ableitungsfunktionen:

(a) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$ auf $I = [-\pi, \pi]$,

(b) $f_n(x) = n\,\log(1 + x/n) - x$ auf $I = [0, 100]$.

Aufgabe 4 *(Exponentialabbildung für Matrizen)*
Es bezeichne $\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij}^2\right)^{1/2}$ die Euklidische Norm der quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Die Reihe $\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ ist für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konvergent.

(c) Die Funktion $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $X(t) = \exp(tA)$, ist (die) Lösung von

$$X'(t) = A\,X(t), \quad X(0) = E_n.$$

(d) Folgern Sie: ist $[A, B] = AB - BA = 0$, so gilt $\exp(A + B) = \exp(A)\,\exp(B)$.

Aufgabe 5 (*Fläche der Kreisscheibe*)
Hier wird der Flächeninhalt der (halben) Kreisscheibe mit Radius Eins berechnet. Wählen Sie Unterteilungspunkte $t_k = k \cdot \pi/n$ mit $k = 0, 1, \ldots, n$. Verbinden Sie die Punkte e^{it_k} mit dem Nullpunkt, sowie mit den Nachbarpunkten. Der gesamte Flächeninhalt dieser Dreiecke ergibt eine Näherung A_n. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{\pi}{2}.$$

Abgabe Montag, 8.2.2016 bis 14:00 in den Briefkästen im Keller des mathematischen Instituts. Dies ist der letzte Zettel, der in die Punktewertung kommt.