
Aufgabe 1 *(Berechnung des Integrals mit Riemannschen Summen)*
Berechnen Sie für $a > 1$ das Integral

$$\int_1^a \log x \, dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Unterteilungspunkte $x_k = a^{k/N}$ für $k = 0, 1, \ldots, N$.

Aufgabe 2 *(Integralnorm)*
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Beweisen Sie, dass durch

$$||\cdot||_1 : C^0(I) \to \mathbb{R}, \ ||f||_1 = \int_a^b |f|$$

eine Norm definiert ist (also Positivität, Halblinearität und Dreiecksungleichung). Ist $||\cdot||_1$ auch eine Norm auf dem Raum $\mathcal{R}(I)$?

Aufgabe 3 *(Flächeninhalt der Ellipse)*
Berechnen Sie den von einer Ellipse mit Halbachsen $a, b > 0$ eingeschlossenen Flächeninhalt, also den Flächeninhalt der Menge

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 4 *(Substitutionsregel)*
Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dt}{\sin t}$ (Substitution $x = \tan \frac{t}{2}$).

(b) $\displaystyle\int_1^a \cos(\log x) \, dx$ $(a > 1)$.

(c) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}} \, dx$.

Aufgabe 5 *(Integral als Funktion der oberen Grenze)*
Sei $f \in C^0(I)$ mit $I = (a, b)$ offen. Wir betrachten die Funktion

$$\phi : (t_1, t_2) \to \mathbb{R}, \ \phi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x) \, dx,$$

wobei $a, b : (t_1, t_2) \to I$ differenzierbar sind. Begründen Sie die Differenzierbarkeit von ϕ und berechnen Sie die Ableitung.

Aufgabe 6 *(Partielle Integration)*
Für $u, v \in C^0([-\pi, \pi])$ definieren wir $\langle u, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} uv \in \mathbb{R}$. Überlegen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Eigenschaften eines Skalarprodukts besitzt (vgl. Lemma 5.3). Berechnen Sie $\langle u_k, u_l \rangle$, $\langle v_k, v_l \rangle$ sowie $\langle u_k, v_l \rangle$ $(k, l \in \mathbb{Z})$ für

$$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos kx \quad \text{und} \quad v_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin kx \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Aufgaben 3-6 zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Vorlesung 11.2.). Besprechung der Aufgaben teilweise in der 1. Ferienwoche.