

**Aufgabe 1** (*Grenzwert rationaler Funktionen*)

Gegeben seien die Polynomfunktionen

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & p(x) &= a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0, \\ q: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & q(x) &= b_\ell x^\ell + b_{\ell-1} x^{\ell-1} + \dots + b_0, \end{aligned}$$

wobei  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $a_i, b_j \in \mathbb{R}$  für  $i = 0, \dots, k$ ,  $j = 0, \dots, \ell$ , und  $a_k, b_\ell \neq 0$ . Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten von  $p(n)/q(n)$  für  $n \rightarrow \infty$  (mit Beweis), abhängig von den gegebenen Parametern  $k, \ell, a_i, b_j$ .

*Hinweis.* Die Aussagen von Aufgabe 2 können benutzt werden, es geht aber auch ohne sie.

**Aufgabe 2** (*Konvergenz von Kehrwerten*)

Man zeige für eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen:

(a)  $a_n \rightarrow \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a_n} \rightarrow 0.$

(b)  $a_n \rightarrow 0, a_n > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a_n} \rightarrow \infty.$

(c) Finden Sie ein Beispiel mit  $a_n \rightarrow 0$ ,  $a_n \neq 0$ , so dass  $1/a_n$  weder gegen  $+\infty$  noch gegen  $-\infty$  konvergiert.

**Aufgabe 3** (*Eine Iteration*)

Ein Frosch hüpft auf der reellen Geraden von  $x_0$  nach  $x_1$ , von  $x_1$  nach  $x_2$  und so weiter. Bei jedem Sprung wird er etwas müder, das heißt es gibt  $0 \leq \theta < 1$  mit

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \theta |x_k - x_{k-1}| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

- (a) Geben Sie eine Abschätzung für  $|x_{k+1} - x_k|$  an, die von  $|x_1 - x_0|$  und  $\theta$  abhängt.
- (b) Wie weit kann sich der Frosch maximal von dem Punkt  $x_0$  entfernen?
- (c) Wie weit kann er sich noch maximal von der Position  $x_k$  entfernen? Beweisen Sie, dass  $(x_k)$  gegen ein  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert.
- (d) Schätzen Sie ab, wie weit  $x_k$  höchstens von  $x$  entfernt ist.

**Aufgabe 4** (*Mehrdeutigkeit der Dezimaldarstellung*)

Wann konvergieren zwei unendliche Dezimalbrüche  $k_0, k_1 k_2 \dots$  und  $m_0, m_1 m_2 \dots$  gegen dieselbe reelle Zahl? Beweisen Sie Ihre Antwort.

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Nummer Ihrer Übungsgruppe und den Namen Ihres Tutors auf Ihre Abgabe. Abgabe ist am Montag, 16.11.2015 bis 14:00 in den Briefkästen im Keller des mathematischen Instituts.*