

Aufgabe 1 (*Grenzwert rationaler Funktionen*)

Gegeben seien die Polynomfunktionen

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & p(x) &= a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0, \\ q : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & q(x) &= b_\ell x^\ell + b_{\ell-1} x^{\ell-1} + \dots + b_0, \end{aligned}$$

wobei $k, \ell \in \mathbb{N}_0$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ für $i = 0, \dots, k$, $j = 0, \dots, \ell$, und $a_k, b_\ell \neq 0$. Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten von $p(n)/q(n)$ für $n \rightarrow \infty$ (mit Beweis), abhängig von den gegebenen Parametern k, ℓ, a_i, b_j .

Hinweis. Die Aussagen von Aufgabe 2 können benutzt werden, es geht aber auch ohne sie.

Aufgabe 2 (*Konvergenz von Kehrwerten*)

Man zeige für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen:

(a) $a_n \rightarrow \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a_n} \rightarrow 0.$

(b) $a_n \rightarrow 0, a_n > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a_n} \rightarrow \infty.$

(c) Finden Sie ein Beispiel mit $a_n \rightarrow 0$, $a_n \neq 0$, so dass $1/a_n$ weder gegen $+\infty$ noch gegen $-\infty$ konvergiert.

Aufgabe 3 (*Eine Iteration*)

Ein Frosch hüpft auf der reellen Geraden von x_0 nach x_1 , von x_1 nach x_2 und so weiter. Bei jedem Sprung wird er etwas müder, das heißt es gibt $0 \leq \theta < 1$ mit

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \theta |x_k - x_{k-1}| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

- (a) Geben Sie eine Abschätzung für $|x_{k+1} - x_k|$ an, die von $|x_1 - x_0|$ und θ abhängt.
- (b) Wie weit kann sich der Frosch maximal von dem Punkt x_0 entfernen?
- (c) Wie weit kann er sich noch maximal von der Position x_k entfernen? Beweisen Sie, dass (x_k) gegen ein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.
- (d) Schätzen Sie ab, wie weit x_k höchstens von x entfernt ist.

Aufgabe 4 (*Mehrdeutigkeit der Dezimaldarstellung*)

Wann konvergieren zwei unendliche Dezimalbrüche $k_0, k_1 k_2 \dots$ und $m_0, m_1 m_2 \dots$ gegen dieselbe reelle Zahl? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Nummer Ihrer Übungsgruppe und den Namen Ihres Tutors auf Ihre Abgabe. Abgabe ist am Montag, 16.11.2015 bis 14:00 in den Briefkästen im Keller des mathematischen Instituts.