

Aufgabe 1 (*Beispiele zum \limsup/\liminf*)

Bestimmen Sie für $a_n = 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots$ und $b_n = 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, \dots$

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n & \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n), \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n & \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n), \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n. & \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (*Rechnen mit \limsup/\liminf*)

Für Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt:

- (a) $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$,
- (b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Hinweis. In (b) muss vorausgesetzt werden, dass nicht gleichzeitig $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ (oder umgekehrt). Sonst ist die Summe der Grenzwerte aber wohldefiniert (nämlich wie)?

Aufgabe 3 (*$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist dicht*)

Zeigen Sie, dass die irrationalen Zahlen dicht in \mathbb{R} sind, das heißt in jedem nichtleeren, offenen Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ gibt es eine irrationale Zahl.

Aufgabe 4 (*irrationale Elemente*)

Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ die Folge $a_n = na - [na]$, $n \in \mathbb{N}$, wobei $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ die Gaußklammer ist. Zeigen Sie:

- (a) Die Folge hat einen Häufungspunkt.
- (b) Für a rational ist die Menge der Häufungspunkte endlich.
- (c) Für a irrational ist jeder Punkt in $[0, 1]$ Häufungspunkt.

Hinweis. Teil (c) ist schwieriger - überlegen Sie dass es ausreicht, a_n nahe bei Null oder Eins zu finden.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Nummer Ihrer Übungsgruppe und den Namen Ihres Tutors auf Ihre Abgabe. Abgabe ist am Montag, 30.11.2015 bis 14:00 in den Briefkästen im Keller des mathematischen Instituts.