Aufgabe 1 *(Supremum und Infimum: Beispiele)*
Bestimmen Sie für A und B jeweils Supremum und Infimum und entscheiden Sie, ob es sich um Maximum bzw. Minimum handelt (ob die Zahlen also durch ein Element der Menge realisiert werden):

$$A = \left\{ \frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{ x + \frac{1}{x} : x > 0 \right\}.$$

Aufgabe 2 *(Ungleichung von Cauchy-Schwarz)*
Geben Sie einen unabhängigen Beweis der Ungleichung $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$, indem Sie zeigen:

$$\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

Diskutieren Sie damit auch den Gleichheitsfall.

Aufgabe 3 *(Mächtigkeit der irrationalen Zahlen)*
Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist M nicht endlich, so besitzt M eine abzählbar unendliche Teilmenge.

(b) Ist M nicht endlich und A abzählbar, so ist M gleichmächtig zu $M \cup A$.

(c) Ist M überabzählbar und $A \subset M$ abzählbar, so ist $M \backslash A$ gleichmächtig zu M.

Folgern Sie: die Menge der irrationalen Zahlen ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4 *(Rechnen mit komplexen Zahlen)*

(1) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1+i}, \quad \frac{1-i}{1+i}, \quad \frac{2-i}{2-3i}, \quad \frac{1}{(3-i)^2}, \quad \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}, \quad \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right)^3,$$

$$(i-1)(3-i), \quad i^n \ (n \in \mathbb{Z}), \quad (1+i)^n \ (n \in \mathbb{Z}).$$

(2) Bestimmen Sie alle sechs Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^6 = 1$ und fertigen Sie eine Zeichnung an.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Nummer Ihrer Übungsgruppe und den Namen Ihres Tutors auf Ihre Abgabe. Abgabe ist am Montag, 7.12.2015 bis 14:00 in den Briefkästen im Keller des mathematischen Instituts.