Übungsaufgaben zur Analysis I — WS 15/16, Serie 8
Ernst Kuwert — 7. Dezember 2015

Aufgabe 1 *(Normen auf $\mathbb{R}^n$)*
Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

Zeigen Sie jeweils die Positivität, Halblinearität und Dreiecksungleichung (vgl. Satz 5.4 der Vorlesung). Skizzieren Sie für $n = 1, 2, 3$ die Einheitskugeln

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 < 1\} \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty < 1\}.$$

Aufgabe 2 *(Abzählbarkeit und Summation)*
Sei $M \subset [0, \infty)$. Es gebe ein $K \in [0, \infty)$, so dass für jede endliche Teilmenge $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le K.$$

Zeigen Sie dass M abzählbar ist.

Aufgabe 3 *(Rechnen mit komplexen Zahlen)*
Zeigen Sie: $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ sind genau dann Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, wenn

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1.$$

Aufgabe 4 *(Offene und abgeschlossene Mengen in $\mathbb{R}$)*
Beweisen Sie: ist $A \subset \mathbb{R}$ offen und abgeschlossen, so ist $A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{R}$.
Anleitung. Andernfalls gibt es $a \in A$ und $b \in \mathbb{R} \backslash A$, oBdA mit $a < b$. Betrachten Sie $\sup\{c \in \mathbb{R} : [a, c) \subset A\}$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Nummer Ihrer Übungsgruppe und den Namen Ihres Tutors auf Ihre Abgabe. Abgabe ist am Montag, 14.12.2015 bis 14:00 in den Briefkästen im Keller des mathematischen Instituts.