Aufgabe 1 *(Binomialreihe)*
Die Binomialreihe mit Parameter $\alpha \in \mathbb{C}$ lautet

$$B_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \dots \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie:

(1) Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ gilt $B_\alpha(z) = (1+z)^\alpha$.

(2) Ist $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, so konvergiert die Reihe für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$.

(3) Für $\alpha \geq -1$ gilt $|B_\alpha(z) - (1+\alpha z)| \leq C\,|z|^2$ für alle $|z| \leq \frac{1}{2}$, mit $C = C(\alpha) < \infty$.

Aufgabe 2 (*Reihen* $\sum_{k=1}^\infty a_k b_k$)
Zeigen oder widerlegen Sie: Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k b_k$ konvergiert, wenn ...

(a) ... beide Reihen $\sum_{k=1}^\infty a_k$ und $\sum_{k=1}^\infty b_k$ konvergieren,

(b) ... $\sum_{k=1}^\infty a_k$ absolut konvergiert und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Aufgabe 3 (*Abschnittssummation*)
Sei $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton fallende Nullfolge, und $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$.

(1) $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{k=0}^\infty p^k a_{p^k}$ konvergiert.

(2) Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent, so folgt $\lim_{n\to\infty}(n a_n) = 0$.

(3) Ist $d(n)$ die Anzahl der Stellen in der Dezimaldarstellung von n, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d(n)^s n}$$

divergent für $0 \leq s \leq 1$ und konvergent für $s > 1$.

Hinweis. Betrachten Sie $p^k \leq n < p^{k+1}$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 4 *(Stetigkeitskriterium)*
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind für $f : D \to \mathbb{R}^m$ folgende Aussagen äquivalent:

(a) f ist stetig auf D.

(b) $f^{-1}(V)$ ist offen für alle $V \subset \mathbb{R}^m$ offen.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Nummer Ihrer Übungsgruppe und den Namen Ihres Tutors auf Ihre Abgabe. Abgabe ist am Montag, 21.12.2015 bis 14:00 in den Briefkästen im Keller des mathematischen Instituts.