Probeklausur zur Analysis I — WS 11/12
Prof. Dr. G. Wang — 1.2017
Dr. Ch. Ketterer

Beginn: 8:15 Uhr — Ende:

Name: . . . . .Vorname: . . . .

Matr.Nr.: . . . . .Studiengang: . . . .

Geburtsort: . . . . .Geburtstag: . . . .

Studiengang: . . . . .Semesterzahl: . . . .

Bitte Beachten Sie folgende Hinweise:

- Resultate aus der Vorlesung dürfen Sie als bekannt voraussetzen. Begründen Sie nach Möglichkeit stichwortartig Ihre Schritte.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Folgen für $n \to \infty$ konvergieren und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert (mit kurzer Begründung).

a) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$, b) $a_n = n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$.

L: a) Mit Teleskopsummentrick gilt

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

b) Aufgabe in Serie 11

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (\sqrt[k]{3} - 1).$$

L: Sei $a_k = \sqrt[k]{3} - 1$. Die Folge $\{a_k\}$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Nach Leibniz konvergiert die alternative Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(\sqrt[k]{3} - 1)$.
Wir behaupten, dass *die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt[k]{3} - 1)$ *nicht konvergent ist*, d.h., $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(\sqrt[k]{3} - 1)$ nicht absolute konvergent ist. Um die Behauptung zu zeigen, vergleichen wir sie mit der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, die nicht konvergent ist:
Aus $\lim_{k\to\infty}(1 + \frac{1}{k})^k = e < 3$ gilt

$$(1 + \frac{1}{k})^k < 3 \Leftrightarrow a_k > \frac{1}{k}$$

für k hinreichend groß. Also die Reihe $\sum(-1)^k(\sqrt[k]{3} - 1)$ ist nicht absolut konvergent.

Bemerkung: Man kann auch die folgende Behauptung benutzen: *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *mit* $\lim_{k\to\infty} ka_k = a > 0$ *ist nicht konvergent.*

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

a) Zeigen Sie mittles vollständiger Induktion, dass $0 < a_n \leq 2$.
b) Zeigen Sie, dass die Folge monoton ist.
c) Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

L: a) und b) sind leicht zu zeigen. Nach a) und b) ist die Folge monoton und beschränkt. Nach der Vorlesung konvergiert die Folge gegen eine Zahl $a \in [0, 2]$. Mit der Rechnungsregeln von Grenzwert folgt aus $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$

$$a^2 = 2 + a,$$

die zwei Lösungen, $a = 2$ und $a = -1$, hat. Die Lösung $a = -1$ ist keine Lösung, da sie nicht im Intervall $[0, 2]$ liegt. Also folgt $a = 2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^5 = 2$ und fertigen Sie eine Skizze an.

L: In den Polarkoordinaten hat die Gleichung $z^5 = 2$ die folgende Form

$$z^5 = r^5 e^{i5\theta} = 2.$$

Also gilt $r = \sqrt[5]{2}$ und $\theta = 2k\pi/5$ für $k \in \mathbb{Z}$. Wir haben 5 Lösungen, da $\theta \in [0, 2\pi)$,

$$z_k = \sqrt[5]{2} e^{i2k\pi/5} \text{ mit } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Betrachten Sie die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y \geq 0\}$. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr sind, jeweils mit Begründung:
(a) M ist beschränkt.

(b) M ist offen.
(c) M ist abgeschlossen.

L: (a) M ist beschränkt, da $|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2} \leq 1$.
(b) M ist nicht offen, da es keine Umgebung U von $(0,0) \in M$ mit $U \subset M$ gibt.
(c) M ist nicht abgeschlossen, da eine Folge $a_n = (0, 1-\frac{1}{n}) \in M$ existiert , die konvergiert, aber der Grenzwert $(0,1) = \lim_{n\to\infty} a_n$ nicht in M liegt.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgener Potenzreihen mit kürzer Begründung

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n b^k z^n, a,b > 0, k \in \mathbb{N}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}} z^n$.

L: (a) Für $z \neq 0$ gilt

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{a^{n+1}b^k|z|^{n+1}}{a^n b^k |z|^n} = a|z|.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe für $|z| < \frac{1}{a}$ und divergiert für $|z| > \frac{1}{a}$, d.h., der Konvergenzradius is $R = \frac{1}{a}$.
(b) $R = \infty$. Denn für jedes festes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \frac{1}{2^{2n}}|z| < 1/2 < 1, \quad \text{für } n \text{ hinreichend groß}$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Wir definieren die Funktion cosh (*Cosinus hyperbolicus*) durch

$$\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty),\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Begründen Sie, dass cosh : $[0,\infty) \to [1,\infty)$ eine Umkehrfunktion besitzt; diese wird mit Arcosh (*Area Cosinus hyperbolicus*) bezeichnet. Leiten Sie die Formel $\mathrm{Arcosh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2-1})$ $(y \in [1,\infty))$ her.

Eine Aufgabe in Serie 11

Aufgabe 8 (6 Punkte)

L: Aus der Voraussetzung haben wir:
(1) Die Folge ist beschränkt, d.h, es existiert $M > 0$ mit $|a_n| \leq M$.
(2) Für bliebige $\epsilon > 0$ existiert N_0 mit $|a_n - a| < \epsilon/2$, für alle $n \leq N_1$. Wähle N_2 mit

$$\frac{2MN_1}{N_2} < \epsilon/2.$$

Setze $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$. Es folgt für $n > N_0$

$$\begin{aligned} |A_n - a| &= \frac{1}{n}|(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)| \\ &\leq \frac{1}{n}\left(|(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots (a_{N_1} - a)| + |(a_{N_1+1} - a) + \cdots + (a_n - a)|\right) \\ &< \frac{2MN_1}{n} + \epsilon/2 < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Also die Folge A_n konvergiert gegen a.

Die Umkehrung ist falsch. Sei $a_n = (-1)^n$. Die Folge konvergiert nicht, aber A_n ist die Nullfolge

$$|A_n| \leq \frac{1}{n} \to 0.$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit der Eigenschaft, dass $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch konvergiert.

L: Seien $a_1 := \lim_{n\to\infty} a_{2n}$, $b := \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$ und $c := \lim_{n\to\infty} a_{3n}$. Wir brauchen nur $a = b$ zu zeigen. (Wieso?)

Wir behaupten $a = c$ und $b = c$. Um $a = c$ zu zeigen, betrachten wir die Teilfolge $\{a_{6n}\}$. Da $\{a_{6n}\}$ eine Teilfolge von der Folge $\{a_{2n}\}$, bzw. von der Folge $\{a_{3n}\}$ ist, gilt $a = c$. Denn jede Teilfolge von einer konvergenten Folge ist konvergent und besitzt denselben Grenzwert.

Um $b = c$ zu zeigen, betrachten wir $\{a_{3(2n+1)}\}$. Da $\{a_{3(2n+1)}\}$ eine Teilfolge von der Folge $\{a_{2n+1}\}$, bzw. von der Folge $\{a_{3n}\}$ ist, gilt $b = c$.