Weihnachtsblatt zur Vorlesung — Wintersemester 2016/17
Analysis 1 — 22. Dezember 2016
Prof. Dr. G. Wang — Dr. C. Ketterer

Aufgabe 0 *(freiwillige Wiederholung: keine Abgabe)*
Stellen Sie die folgenden, für das weitere Verständnis wesentlichen Begriffe, zusammen. Versuchen Sie, Beispiele und Gegenbeispiele zu finden, die *nicht* schon in der Vorlesung gegeben wurden.

Begriffe: Induktion, Negation, Betrag und Euklidische Norm, Konvergenz von Folgen (Nullfolgen, monotone Folgen, uneigentliche Konvergenz), Cauchyfolge, Teilfolge, beschränkte Folge und Häufungspunkte einer Folge, Limes inferior und superior, Intervallschachtelung, Bolzano-Weierstraß Auswahlsatz, Häufungspunkte einer Menge, Supremum/Infimum, Vollständigkeit im $\mathbb{R}^n$, offene und abgeschlossene Menge, ε-Umgebung, Stetigkeit (mit ε-δ und mit Folgen), Lipschitzstetigkeit, Grenzwert für Funktionen, linksseitige unf rechtsseitge Grenzwert, Umkehrfunktion, Maximum/Minimum, Zwischenwertsatz, Expotentialfunktion, Potenz, Cosinus, Sinus. Differenzierbarkeit.

Keine Abgabe! Sie bekommen die Lösung im Januar 2017.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Folgen für $n \to \infty$ konvergieren und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert (mit kurzer Begründung).

(a) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k+1)}$,

(b) $a_n = n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (\sqrt[k]{3} - 1).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Die reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

(a) Zeigen Sie mittles vollständiger Induktion, dass $0 < a_n \leq 2$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge monoton ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ (in Polarkoordinaten) der Gleichung $z^5 = 2$ und fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Betrachten Sie die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y \geq 0\}$. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen war sind, jeweils mit Begründung:

(a) M ist beschränkt.

(b) M ist offen.

(c) M ist abgeschlossen.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenreihen mit kurzer Begrüdnung.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n b^k z^n, \quad a, b > 0, \; k \in \mathbb{N}.$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}} z^n.$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Wir definieren die Funktion cosh (*Cosinus hyperbolicus*) durch

$$\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty), \, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Begründen Sie, dass $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ eine Umkehrfunktion besitzt; diese wird mit Arcosh (*Area Cosinus hyperbolicus*) bezeichnet. Leiten Sie die Formel $\operatorname{Arcosh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$ $(y \in [1, \infty))$ her.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Für eine gegebene Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ betrachten wir die Folge $A_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ der arithmetischen Mittelwerte der ersten n Folgenglieder. Zeigen Sie

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} A_n = a.$$

Gilt die Umkehrung dieses Schlusses? Warum?

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit der Eigenschaft, dass $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch konvergiert.

Frohe Weihnachten und einen guten Rustch ins neue Jahr!