Übungsaufgaben zur Vorlesung	Wintersemester 2016/17, Serie 10
Analysis 1	19. Dezember 2016
Prof. Dr. G. Wang	Dr. Christian Ketterer

Aufgabe 1 (*Eulersche Formel*) (4 Punkte)

Berechnen Sie mittels der Eulerschen Formel die Summen

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kt \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin kt \quad (t \notin 2\pi\mathbb{Z}).$$

Aufgabe 2 (*Tangengs und Cotangens*) (4 Punkte)

Wir definieren die Funktionen tan (*Tangens*) und cot (*Cotangens*) durch

$$\begin{aligned} &\tan : \mathbb{R}\backslash\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad && \tan = \tfrac{\sin x}{\cos x}, \\ &\cot : \mathbb{R}\backslash\{k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, && \cot = \tfrac{\cos x}{\sin x}. \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die Grahpen der Funktionen $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ und $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$.

(b) Begründen Sie, dass $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ eine Umkehrfunktion besitzt; diese wird mit $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (*Arcus Tangens*) bezeichnet. Entsprechend hat $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ eine Umkehrfunktion; diese wird mit $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ (*Arcus Cotangens*) bezeichnet.

Aufgabe 3 (*Polarkoordinaten*) (4 Punkte)

Rechnen Sie für $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ die Gleichung $z = re^{i\vartheta}$ nach, wenn r und ϑ wie folgt definiert sind:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \begin{cases} \arccos(x/r) & \text{für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos(x/r) & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Schreiben Sie die Zahlen -3, $4i$, $-5i$, $-e^{2i}$, $i\,e^{it}(t \in \mathbb{R})$, $1 + i$, $-1 - i$ und $(1 + i)^{2012}$ in der Form $re^{i\vartheta}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(1) *(Definition der Ableitung)* Sei $g : (-a, a) \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : (-a, a) \to \mathbb{R}, \; f(x) = |x|^{1+\alpha}\, g(x)$$

im Punkt $x = 0$ die Ableitung $f'(0) = 0$ hat, falls $\alpha > 0$ ist.

(2) *(Differentiationsregeln)* Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen (mit Angabe des Definitionsbereichs):

(a) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

(b) $f(x) = x^\alpha \log(x)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie den Namen des Tutors und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Heften Sie mehrere Lösungsblätter sicher aneinander.
Abgabe ist am Montag, 09.01.2017 bis 12 Uhr in den Briefkästen im Untergeschoss des mathematischen Instituts.

Frohe Weihnachten und guten Rustch ins neue Jahr!