Übungsaufgaben zur Vorlesung	Wintersemester 2016/17, Serie 11
Analysis 1	9. Jan. 2017
Prof. Dr. G. Wang	Dr. Christian Ketterer

Aufgabe 1 (*Definition der Ableitung und Stetigkeit*) (4 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 2 (*Kettenregel*) (4 Punkte)

Differenzieren Sie die beiden Funktionen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = x^{(x^x)}$

(b) $f(x) = (x^x)^x$.

Aufgabe 3 (*Die Tangensfunktion und Ihre Umkehrfunktion*) (4 Punkte)

Die Funktion $\tan : \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$, heißt Tangens.
Zeigen Sie:

(a) $\tan(t + \pi) = \tan t \quad$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (vgl. Aufgabe 1 in Serie 10.) ist differenzierbar und $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Aufgabe 4 (*Hebbarer Punkt für f'*) (4 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in I$ stetig, auf $I\backslash\{x_0\}$ differenzierbar und es gelte $\lim_{x\to x_0} f'(x) = a$. Zeigen Sie mit dem Mittelwertsatz $f'(x_0) = a$.

Aufgabe 5 (4* Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $a_n = n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$.
Hinweis: Schreiben Sie $a_n = n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$ als eine Quotient von 2^x im Punkt $x = 0$.

(b) Wir definieren die Funktion cosh (*Cosinus hyperbolicus*) durch

$$\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty),\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Begründen Sie, dass $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ eine Umkehrfunktion besitzt; diese wird mit Arcosh (*Area Cosinus hyperbolicus*) bezeichnet. Leiten Sie die Formel $\operatorname{Arcosh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$ $(y \in [1, \infty))$ her.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie den Namen des Tutors und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Heften Sie mehrere Lösungsblätter sicher aneinander.

Abgabe ist am Montag, 16.01.2017 bis 12 Uhr in den Briefkästen im Untergeschoss des mathematischen Instituts.