
Aufgabe 1 (*Maximumprinzip*) (4 Punkte)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und zweimal differenzierbar auf (a,b). Falls $f'' \geq 0$, so gilt $\sup f \leq \max\{f(a), f(b)\}$.

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage zunächst unter der Voraussetzung $f'' \geq \varepsilon > 0$. Diese Zusatzannahme werden Sie wieder los, indem Sie $f + \varepsilon q$ mit einer geeigneten Hilfsfunktion q betrachten.

Aufgabe 2 (*Exponentielles Wachstum*) (4 Punkte)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ stetig, auf (a,b) differenzierbar, $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$f' \geq \alpha f \text{ auf } (a,b) \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha x_2} f(x_2) \geq e^{-\alpha x_1} f(x_1)$$
$$f' \leq \alpha f \text{ auf } (a,b) \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha x_2} f(x_2) \leq e^{-\alpha x_1} f(x_1).$$

Aufgabe 3 (*Die Regel von de l'Hospital*) (4 Punkte)

Berechnen Sie die Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

$$(a)\ \lim_{x\to 0} x \log x; \quad (b)\ \lim_{x\to 0} x^x; \quad (c)\ \lim_{x\to\infty} x\left(\tfrac{\pi}{2} - \arctan x\right); \quad (d)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}.$$

Aufgabe 4 (*Berechnung des Integrals mit Riemannschen Summen*) (4 Punkte)

Berechnen Sie für $a > 1$ das Integral

$$\int_1^a \log x \, dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Unterteilungspunkte $x_k = a^{k/N}$ für $k = 0, 1, \ldots, N$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie den Namen des Tutors und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Heften Sie mehrere Lösungsblätter sicher aneinander.

Abgabe ist am Montag, 23.01.2017 bis 12 Uhr in den Briefkästen im Untergeschoss des mathematischen Instituts.