Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis 1
Prof. Dr. G. Wang

Wintersemester 2016/17, Serie 13
23. Jan. 2017
Dr. Christian Ketterer

Aufgabe 1 *(Gleichmäßige Konvergenz)* (4 Punkte)

Prüfen Sie auf gleichmäßige Konvergenz, sowie auf gleichmäßige Konvergenz der Ableitungsfunktionen:

(a) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n} \quad$ auf $I = [-\pi, \pi]$,

(b) $f_n(x) = n \log(1 + x/n) - x \quad$ auf $I = [0, 100]$.

Aufgabe 2 *(Integral als Funktion der oberen Grenze)* (4 Punkte)

Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F : [a, b] \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi$$

Lipschitzstetig ist.

Aufgabe 3 *(Partielle Integration)* (4 Punkte)

Bestätigen Sie durch vollständige Induktion die Formel

$$\int_0^1 x^k\, (1-x)^{n-k}\, dx = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} \quad (n \in \mathbb{N}_0,\ 0 \le k \le n).$$

Aufgabe 4 *(Substitutionsregel)* (4 Punkte)

Berechnen Sie dir folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dt}{\sin t} \quad$ (Substitution $x = \tan \frac{t}{2}$).

(b) $\displaystyle\int_1^a \cos(\log x)\, dx \quad (a > 1)$.

(c) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\, dx$.

Aufgabe 5 *(Integralnorm)* (4* Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Beweisen Sie, dass durch

$$|| \cdot ||_1 : C^0(I) \to \mathbb{R},\ ||f||_1 = \int_a^b |f|$$

eine Norm definiert ist (also Positivität, Halblinearität und Dreiecksungleichung). Ist $||\cdot||_1$ auch eine Norm auf dem Raum $\mathcal{R}(I)$? ($C^0(I)$ ist die Menge der stetigen Funktionen auf I.)

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie den Namen des Tutors und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Heften Sie mehrere Lösungsblätter sicher aneinander.
Abgabe ist am Montag, 30.01.2017 bis 12 Uhr in den Briefkästen im Untergeschoss des mathematischen Instituts.