
Aufgabe 1 *(Substitutionsregel)* (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Stammfunktionen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + px + q}$$

mit einer Fallunterscheidung je nach Vorzeichen von $D = p^2 - 4q$, d.h. bestimmen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx.$$

Aufgabe 2 *(Partielle Integration)* (4 Punkte)

Für $u, v \in C^0([-\pi, \pi])$ definieren wir $\langle u, v \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} uv \in \mathbb{R}$. Überlegen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Eigenschaften eines Skalarprodukts besitzt (siehe Kapitel 1, Lemma 5.1). Berechnen Sie weiter die Skalarprodukte $\langle u_k, u_l \rangle$, $\langle v_k, v_l \rangle$ sowie $\langle u_k, v_l \rangle \quad (k, l \in \mathbb{Z})$ für

$$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos kx \qquad \text{und} \qquad v_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin kx \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Aufgabe 3 *(Uneigentliches Integral)* (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

konvergent, aber nicht absolut konvergent ist.

Aufgabe 4 *(gleichmäßige Konvergenz)* (4 Punkte)

Sei $f_n = \sum_{k=0}^n z^k$. Ist $\{f_n\}$ punktweis konvergent auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$? Ist $\{f_n\}$ gleichmäßig konvergent auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$? (Begründen Sie Ihre Antwort)

Aufgabe 5 *(Integral als Funktion der oberen Grenze)* (4* Punkte)

Sei $f \in C^0(I)$ mit $I = (a, b)$ offen. Wir betrachten die Funktion

$$\Phi : I^* \to \mathbb{R},\ \Phi(t) = \int_{a_0}^{b(t)} f(x)\, dx,$$

wobei $a_0 \in I$ und $b : I^* \to I$ differenzierbar ist. Begründen Sie die Differenzierbarkeit von Φ und berechnen Sie die Ableitung.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie den Namen des Tutors und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Heften Sie mehrere Lösungsblätter sicher aneinander.
Abgabe ist am Montag, 06.02.2017 bis 12 Uhr in den Briefkästen im Untergeschoss des mathematischen Instituts.