Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis 1
Prof. Dr. G. Wang

Wintersemester 2016/17, Serie 2
24. Oktober 2016
Dr. Christian Ketterer

Aufgabe 1 (*Betrag*) (4 Punkte)

Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 2 *(Ungleichungen)* (4 Punkte)

Beweisen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 3 *(Induktion)* (8 Punkte)

(a) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Ungleichung $n! < n^n$.

(b) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Binomialkoeffizienten durch

$$\binom{\alpha}{k} := \prod_{j=1}^{k} \tfrac{\alpha-j+1}{j}, \text{ sowie } \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Zeigen Sie durch Induktion die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+k}{k} = \binom{\alpha+n+1}{n}.$$

(c) Für natürliche Zahlen n und $k_1, \ldots, k_m$ mit $k_1 + \cdots + k_m = n$ definieren wir die Polynomialkoeffizienten durch

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_m} := \tfrac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Zeigen Sie durch Induktion

$$(a_1 + \cdots + a_m)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} \cdot a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_m^{k_m}.$$

Hinweis: Zeigen sie zuerst, es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$ *für* $n, k \in \mathbb{N}$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie den Namen des Tutors und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Heften Sie mehrere Lösungsblätter sicher aneinander.

Abgabe ist am Montag, 31.10.2016 bis 12 Uhr in den Briefkästen im Untergeschoss des mathematischen Instituts.