Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis 1
Prof. Dr. G. Wang

Wintersemester 2016/17, Serie 3
31. Oktober 2016
Dr. Christian Ketterer

Aufgabe 1 (*Arithmetisches vs geometrisches Mittel*) (4 Punkte)
Es seien $a_1, \dots, a_n > 0$ mit $\Pi_{i=1}^n a_i = 1$. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die Ungleichung

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq 1$$

und diskutieren Sie den Fall der Gleichheit.

Aufgabe 2 *(Ungleichung)* (4 Punkte)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion für reelle Zahlen $a_1, \dots, a_n > 0$ die Ungleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $a + \frac{1}{a} \geq 2$ für eine reelle Zahl $a > 0$.

Aufgabe 3 (*Bijektionen*) (4 Punkte)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion und ohne den Begriff der "Anzahl der Elemente einer Menge" zu verwenden: es gibt keine Bejektion zwischen den Mengen $\{1, \dots, n\}$ und $\{1, \dots, m\}$ für $n \neq m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 *(Berechnung von Grenzwerten)* (4 Punkte)
Untersuchen Sie für die verschiedenen Werte a_n die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz für $n \to \infty$ und bestimmen Sie im konvergenten Fall den Grenzwert (jeweils mit kurzer Begründung).

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad \frac{3n+1}{5n+1}, \quad \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie den Namen des Tutors und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Heften Sie mehrere Lösungsblätter sicher aneinander.
Abgabe ist am Montag, 07.11.2016 bis 12 Uhr in den Briefkästen im Untergeschoss des mathematischen Instituts.