Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis 1
Prof. Dr. G. Wang

Wintersemester 2016/17, Serie 4
7. November 2016
Dr. Christian Ketterer

Aufgabe 1 *(Grenzwerte)* (4 Punkte + 1 Bonuspunkt)

Untersuchen Sie für die verschiedenen Werte a_n die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz für $n \to \infty$ und bestimmen Sie im konvergenten Fall den Grenzwert (jeweils mit Begründung).

$$a_n = \frac{1}{1+\frac{1}{(-2)^n}}; \quad (-1)^n \frac{3n-1}{n}; \quad \frac{n^n}{n!}; \quad ((2+\frac{1}{n})^3 - 8)n; \quad n^q\, r^n;$$

wobei $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $|r| < 1$.

Aufgabe 2 *(Dichtheit)* (4 Punkte)

Zeigen Sie: zu je zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es eine irrationale Zahl $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ mit $a < x < b$.

Aufgabe 3 *(Konvergenz von Mittelwerten)* (4 Punkte)

Für eine gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten wir die Folge $A_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ der arithmetischen Mittelwerte der ersten n Folgenglieder. Zeigen Sie (wobei es günstig ist, zunächst $a = 0$ anzunehmen):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} A_n = a.$$

Gilt die Umkehrung dieses Schlusses?

Aufgabe 4 *(Konvergenz von Betrag und Minimum)* (4 Punkte)

Es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Folgern Sie

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a| \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \min(a_n, b_n) = \min(a, b).$$

Hierbei ist $\min(a,b) = \begin{cases} b, & \text{falls } a \geq b \\ a, & \text{falls } a < b \end{cases}.$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\min(a,b) = \frac{1}{2}(a + b - |a-b|)$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie den Namen des Tutors und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Heften Sie mehrere Lösungsblätter sicher aneinander.

Abgabe ist am Montag, 14.11.2016 bis 12 Uhr in den Briefkästen im Untergeschoss des mathematischen Instituts.