Übungsaufgaben zur Vorlesung | Wintersemester 2016/17, Serie 6
Analysis 1 | 21. November 2016
Prof. Dr. G. Wang | Dr. Christian Ketterer

Aufgabe 1 (*Monotonie*) (4 Punkte)
Sei $x \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > |x|$ die Zahlenfolgen

$$E_n(x) = \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \quad \text{und} \quad F_n(x) = \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^{-n}.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $E_n(x) \le F_n(x)$, (b) $E_n(x) \le E_{n+1}(x) \le \dots$,

(c) $F_n(x) \ge F_{n+1}(x) \ge \dots$, (d) $E_n(x) \le F_m(x)$ für $n, m > |x|$.

Aufgabe 2 (*Häufungspunkte*) (4 Punkte)

(a) Geben Sie eine Folge an, für die jedes $x \in [0,1]$ ein Häufungspunkt ist.

(b) H sei die Menge der Häufungspunkte der reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Zeigen Sie, daß
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup H.$$

Aufgabe 3 (*Komplexe Zahlen*) (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, den Betrag sowie die konjugiert-komplexe Zahl zu
$$\frac{1}{1+i}\,; \quad \frac{2-i}{2+i}\,; \quad \frac{3+i}{1+2i}\,; \quad (2+i)^n, n \in \mathbb{Z}\,; \quad \Big(\frac{1-i}{1+i}\Big)^n, n \in \mathbb{Z}\,.$$

(b) Bestimmen Sie die Quadratwurzeln von i. (Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{C}$ mit $x^2 = i$.)

Aufgabe 4 (*Reihen*) (4 Punkte)
Welche der folgenden Reihen sind konvergent? Berechnen Sie gegebenenfalls den Wert der Reihe.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

Aufgabe 5 *(Ein Konvergenzprinzip)* (4 Bonuspunkte)
Über die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei bekannt: es gibt ein $a \in \mathbb{R}$, so dass jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihrerseits eine weitere Teilfolge $(a_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ besitzt, die gegen a konvergiert. Dann konvergiert schon die ganze Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Hinweis: Beweis durch Widerspruch.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie den Namen des Tutors und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Heften Sie mehrere Lösungsblätter sicher aneinander.
Abgabe ist am Montag, 28.11.2016 bis 12 Uhr in den Briefkästen im Untergeschoss des mathematischen Instituts.