Übungsaufgaben zur Vorlesung | Wintersemester 2016/17, Serie 7
Analysis 1 | 28. November 2016
Prof. Dr. G. Wang | Dr. Christian Ketterer

Aufgabe 1 (*Reihenkonvergenzkriterium*) (4 Punkte)

(a) Wann konvergiert eine Reihe absolut?

(b) Geben Sie die Definition des Quotientenkriteriums für Reihen an.

Aufgabe 2 (*Reihen*) (4 Punkte)

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Reihen?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$$

Aufgabe 3 (*Folgen*) (4 Punkte)

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$x_n = \left((-1)^n \frac{5 \cdot 4^n + 1}{5^n - 1} \;,\; (-1)^{n(n+1)/2} \frac{3n+1}{n^2+1} \right) .$$

Bestimmen Sie den Grenzwert dieser Folge (mit Beweis) und skizzieren Sie die ersten fünf Folgenglieder in einem Schaubild.

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ konvergiert gegen $x_0 \in \mathbb{R}^2$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in R$ existiert mit $|x_n - x_0| < \varepsilon$, $\forall\, n > N$. Hierbei ist $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4 *(Konvergenz)* (4 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Sei $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton fallende Nullfolge, und $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} p^k a_{p^k}$ konvergiert.

(2) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so folgt $\lim_{n\to\infty}(n a_n) = 0$.

(3) Ist $d(n)$ die Anzahl der Stellen in der Dezimaldarstellung von n, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d(n)^s n}$$

divergent für $0 \leq s \leq 1$ und konvergent für $s > 1$.

Bemerkung: Unter einer Nullfolge versteht man eine Folge, die gegen 0 konvergiert.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie den Namen des Tutors und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Heften Sie mehrere Lösungsblätter sicher aneinander.

Abgabe ist am Montag, 05.12.2016 bis 12 Uhr in den Briefkästen im Untergeschoss des mathematischen Instituts.