Aufgabe 1 (*Dichte Teilmengen und Stetigkeit*) (4 Punkte)

Seien $f, g \in C^0(\mathbb{R})$ mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie $f = g$, also $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) (*Existenz eines Fixpunkts*)

Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Zeigen Sie, dass es eine Lösung der Gleichung $f(x) = x$ gibt (eine solche Lösung heißt Fixpunkt von f). Finden Sie ein Gegenbeispiel, wenn das Intervall nicht abgeschlossen ist.

(b) (*Monotonie und Invertierbarkeit*)

Zeigen Sie: eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann injektiv, wenn sie streng monoton (wachsend oder fallend) ist.

Aufgabe 3*(Potenzfunktionen)* (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $\alpha > 0$ die Funktion

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty),\ f(x) = x^\alpha = \begin{cases} e^{\alpha \log x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

streng monoton wachsend und stetig ist, und dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

Aufgabe 4 *(Sprungstellen monotoner Funktionen)* (4 Punkte)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Nach Kap. 2, Lemma 3.1 der Vorlesung existieren für $x_0 \in (a, b)$ die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\searrow x_0} f(x) =: f_+(x_0)$ und $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) =: f_-(x_0)$. Zeigen Sie:

(1) f ist genau dann stetig in x_0, wenn $f_+(x_0) = f_-(x_0)$. Andernfalls heißt x_0 eine Sprungstelle mit Sprung $f_+(x_0) - f_-(x_0) > 0$.

(2) Die Menge der Sprungstellen von f ist abzählbar.

Hinweis: Sei $M \subset [0, +\infty)$. Es gebe ein $K \in [0, +\infty)$, so dass für jede endliche Teilmenge $\{x_1, \dots, x_n\} \subset M$ gilt: $\sum_{i=1}^n x_i \leq K$. Dann ist M abzählbar.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie den Namen des Tutors und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Heften Sie mehrere Lösungsblätter sicher aneinander.
Abgabe ist am Montag, 19.12.2016 bis 12 Uhr in den Briefkästen im Untergeschoss des mathematischen Instituts.