

Aufgabe 1 (*Folge mit vielen Häufungspunkten*)

(a) Zeigen Sie dass die Menge

$$M := \{ j2^{-k} : j, k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq j < 2^k \}$$

dicht in $[0, 1]$ ist.

(b) Konstruieren Sie mit (a) eine Folge, für die jedes $x \in [0, 1]$ ein Häufungspunkt ist.

Aufgabe 2 (*Ein Konvergenzkriterium*)

Gegeben seien eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und ein $a \in \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft:

Jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt ihrerseits eine Teilfolge, die gegen a konvergiert.

Zeigen Sie durch Widerspruch, dass die ganze Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Aufgabe 3 Berechnen Sie für die Folgen $a_n = 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots$ und $b_n = 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, \dots$ die fünf Zahlen

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ & \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n), \\ & \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ & \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n), \\ & \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n. \end{aligned}$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 28.11.2019 bis 11:00.