Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 16, Serie 1
Ernst Kuwert — 18. April 2016

Aufgabe 1 *(Konvergenz des Abstands)*
Zeigen Sie in einem metrischen Raum X die Implikation

$$x_k \to x,\, y_k \to y \quad \Rightarrow \quad d(x_k, y_k) \to d(x,y).$$

Aufgabe 2 *(Abschluss und Inneres)*
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ für alle $M \subset \mathbb{R}^n$.

(b) $\mathrm{int}(\overline{\Omega}) = \Omega$ für alle offenen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(c) $\partial(\partial M) = \partial M$ für alle $M \subset \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3 *(Äquivalenz der Normen im $\mathbb{R}^n$)*
Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^n$ die Euklidische Norm $|x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}$, sowie eine beliebige zweite Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Es gilt $\|x\| \leq C\,|x|$ mit $C = \Big(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\Big)^{1/2}$.

(b) Die Funktion $f(x) = \|x\|$ ist Lipschitzstetig auf $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ mit Konstante C.

(c) Es gilt $\lambda := \inf\{\|x\| : |x| = 1\} > 0$.

(d) Es gilt $|x| \leq C'\|x\|$ mit $C' = 1/\lambda$.

Erläuterung: Zwei Normen, die wie oben durch Konstanten C, C' gegeneinander abgeschätzt sind, heißen äquivalent; das ist eine Äquivalenzrelation. Im $\mathbb{R}^n$ sind also alle Normen äquivalent, denn jede Norm ist äquivalent zur Euklidischen Norm. Das bedeutet zum Beispiel, dass im $\mathbb{R}^n$ der Begriff der offenen Menge oder der Konvergenz nicht von der Wahl einer Norm abhängt. So überraschend ist das jetzt auch nicht, wir hatten ja schon die Äquivalenz zur Konvergenz der einzelnen Koordinaten.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 25.4.2016 bis 12:00.