Aufgabe 1 *(Räuber-Beute-Modell)*
Die Funktionen $x, y \in C^1(I)$ seien Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x' &= (\alpha - \beta y)x \\ y' &= (-\gamma + \delta x)y \end{aligned}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Zeigen Sie: für $H(x,y) = \gamma \log x - \delta x + \alpha \log y - \beta y$ ist $H(x(t), y(t))$ konstant. Folgern Sie, dass die Lebensdauer einer Lösung mit Anfangsdaten $x_0, y_0 > 0$ gleich $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2 *(Flusslinien)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass für eine maximale Lösung $x : (\alpha, \beta) \to \Omega$ von $x' = f(x)$ genau eine der folgenden Aussagen gilt:

(a) x ist injektiv.

(b) x ist periodisch, das heißt $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}$ und es gibt ein $p > 0$ mit $x(t+p) = x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis. Eine konstante Lösung bezeichnet man eigentlich nicht als periodisch, aber hier ist sie unter (b) mit einbegriffen.

Aufgabe 3 *(Freier Fall nahe der Erdoberfläche mit Reibung)*
Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} mx''(t) &= -mg + ax'(t)^2, \\ x(0) &= h, \quad x'(0) = 0. \end{aligned}$$

Dabei sind a, g, h und m positive Konstanten.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe Montag, 18.7.2016 bis 12:00.