Aufgabe 1 *(Zur Vertauschung der partiellen Ableitungen)*
In der Vorlesung hatten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die zweiten partiellen Ableitungen $\partial_1\partial_2 f(0,0)$ und $\partial_2\partial_1 f(0,0)$ existieren, aber nicht gleich sind.

Aufgabe 2 *(Wärmeleitungsgleichung)*
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R},\ u(x,t) = (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-|x|^2/4t}$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \Delta u$ ist.

Aufgabe 3 *(Gradient, Rotation, Divergenz)*
Die Differentialoperatoren $\operatorname{grad}, \operatorname{rot}, \operatorname{div}$ sind im $\mathbb{R}^3$ folgt definiert:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f), \\ \operatorname{rot} X &= (\partial_2 X_3 - \partial_3 X_2, \partial_3 X_1 - \partial_1 X_3, \partial_1 X_2 - \partial_2 X_1), \\ \operatorname{div} X &= \partial_1 X_1 + \partial_2 X_2 + \partial_3 X_3. \end{aligned}$$

Zeigen Sie für $f \in C^2(\Omega)$ und $X \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div}\operatorname{rot} X = 0.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 2.5.2016 bis 12:00.