Aufgabe 1 *(Produktregel)*
Die Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ seien im Punkt $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Beweisen Sie die Produktregel: $fg : \Omega \to \mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar und es gilt

$$D(fg)(x_0) = Df(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, Dg(x_0).$$

Aufgabe 2 *(Eulersche Identität)*
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) $f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, t > 0$ $\quad$ (f ist homogen vom Grad α).

(2) $Df(x)x = \alpha f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Hinweis. Betrachten Sie für (2) $\Rightarrow$ (1) die Funktion $g(t) = t^{-\alpha} f(tx)$.

Aufgabe 3 *(Tangentialebene an Graphen)*
Sei G Graph der Funktion $f : \Omega = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\} \to \mathbb{R}$, $f(y) = \sqrt{1 - |y|^2}$.

(a) Verwenden Sie die Formeln aus der Vorlesung, um den Tangentialraum und die nach oben weisende Einheitsnormale von G im Punkt $p = (x, f(x))$ zu berechnen.

(b) Stellen Sie $G_{p,\lambda} = \frac{1}{\lambda}(G - p)$ als Graph dar (inkl. Definitionsbereich).

(c) Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert der Graphenfunktion für $\lambda \to 0$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 9.5.2016 bis 12:00.