Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 16, Serie 4

Ernst Kuwert — 9. Mai 2016

---

**Aufgabe 1** *(Gradientenflüsse)*
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \lambda x^2 + \mu y^2$, für gegebene $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\gamma'(t) = -\operatorname{grad} f(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = (x_0, y_0).$$

(a) Zeigen Sie: $f(\gamma(t))$ ist monoton fallend.

(b) Zeigen Sie, dass $\gamma(t)$ die Höhenlinien von $f$ senkrecht schneidet.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

(d) Zeichnen Sie typische Lösungskurven und Höhenlinien in den drei Fällen $(\lambda, \mu) = (\frac{1}{4}, 1)$, $(-\frac{1}{4}, 1)$ und $(0, 1)$.

**Aufgabe 2** *(eindimensional vs. mehrdimensional)*
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (y - \varepsilon x^2)(y - x^2)$, für $0 < \varepsilon < 1$.

(a) Skizzieren Sie die Mengen $\{(x,y) : f(x,y) > 0\}$.

(b) Sei $L$ eine beliebige Gerade durch den Nullpunkt. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $f|_L$ in $(0,0)$ ein striktes lokales Minimum hat.

(c) Die Funktion $f$ hat in $(0,0)$ kein lokales Minimum.

**Aufgabe 3** *(Ableitung der Determinante)*
Sei $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $f(X) = \det X$ für $X = (x_{ij})$. Zeigen Sie:

(a) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n\times n})$.

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x_{ij}}(E_n) = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, \ldots, n$, und $E_n$ die Einheitsmatrix.

(c) $Df(E_n)H = \operatorname{tr} H, \quad \big(\operatorname{tr} H = \sum_{i=1}^n h_{ii} \text{ Spur von } H\big)$.

(d) $Df(X)H = \det X \operatorname{tr}(X^{-1}H)$ falls $\det(X) \neq 0$.

*Hinweis.* Sie brauchen eine Formel für $\det(X)$, z.B. die von Leibniz oder Laplace.

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 23.5.2016 bis 12:00.*