Aufgabe 1 *(Nichtdegenerierte kritische Punkte)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ein kritischer Punkt $x \in \Omega$ der Funktion $f \in C^2(\Omega)$ heißt nichtdegeneriert, wenn die Hessematrix $D^2 f(x)$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass x dann ein isolierter kritischer Punkt ist: es gibt eine offene Umgebung $B_\varepsilon(x)$, in der keine weiteren kritischen Punkte von f liegen.

Aufgabe 2 *(Stützhyperebenen)*
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Zeigen Sie: zu jedem $x \in \partial M$ gibt es ein $\nu \in \mathbb{R}^n$, $|\nu| = 1$, so dass

$$M \subset \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \nu, y - x \rangle \geq 0\}.$$

Man nennt dann $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle \nu, y - x \rangle = 0\}$ eine Stützhyperebene in $x \in \partial M$.
Anleitung. Wähle $p_k \in \mathbb{R}^n \backslash M$ mit $p_k \to x$, und bestimme $x_k \in M$ mit $|x_k - p_k| = \inf_{y \in M} |y - p_k|$. Nach Wahl einer Teilfolge konvergiert $(x_k - p_k)/|x_k - p_k|$ gegen ein ν wie verlangt (was zu zeigen ist).

Aufgabe 3 *(Gram-Schmidt-Verfahren)*
Sei V endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und induzierter Norm $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V mit $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ heißt Orthonormalbasis. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(1) Ist $u_1, \ldots, u_k$ Orthonormalbasis des Unterraums $U \subset V$, so ist

$$P_U : V \to U,\ P_U v = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle u_i$$

die Orthogonalprojektion auf U, das heißt es gilt $P_U u = u$ für alle $u \in U$, und $P_U v = 0$ für alle $v \perp U$.

(2) Sei $v_1, \ldots, v_n$ irgendeine Basis von V. Dann erhält man induktiv eine Orthonormalbasis $u_1, \ldots, u_n$ wie folgt:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|}, \\ \tilde{u}_{k+1} &= v_{k+1} - P_{U_k} v_{k+1} \qquad \text{wobei } U_k = \operatorname{Span}\{u_1, \ldots, u_k\}, \\ u_{k+1} &= \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\|\tilde{u}_{k+1}\|}. \end{aligned}$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 6.6.2016 bis 12:00