Aufgabe 1 *(Binomialreihe)*

(a) Rechnen Sie nach, dass die Taylorreihe von $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, die Binomialreihe $B_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ ist.

(b) Zeigen Sie für $x \in [0,1)$ mittels Abschätzung des Restglieds, dass die Reihe in der Tat gegen $f(x)$ konvergiert.

(c) Zeigen Sie: $f(x)$ und $B_\alpha(x)$ lösen beide das Anfangswertproblem

$$u'(x) = \frac{\alpha}{1+x}\, u(x) \quad \text{für } x \in (-1,1), \quad u(0) = 1.$$

(d) Folgern Sie, dass die Reihe auf ganz $(-1,1)$ gegen $f(x)$ konvergiert. (Hinweis: Differenzieren Sie den Quotienten B_α/f.)

Hinweis: Nach Analysis I, Beispiel 13.2, hat die Reihe Konvergenzradius $R = 1$, die Restgliedabschätzung ist aber schwieriger für $x \in (-1,0)$.

Aufgabe 2 *(eine mehrdimensionale Taylorreihe)*
Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \ldots + x_n \neq 1\}$. Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f : \Omega \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1-(x_1+\ldots+x_n)}$$

mit Entwicklungspunkt $x = 0$. Für welche x konvergiert die Reihe, und konvergiert sie dann gegen die Funktion f?

Hinweis: Denken Sie an die geometrische Reihe.

Aufgabe 3 *(symmetrische Bilinearformen)*
Wir betrachten auf $V = C^1([-\pi,\pi])$ die folgenden symmetrischen Bilinearformen:

$$\langle u,v\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)\,dx \quad \text{und} \quad b(u,v) = \int_{-\pi}^{\pi} u'(x)v'(x)\,dx.$$

Weiter definieren wir folgende Funktionen in V, wobei hier $k \in \mathbb{N}$:

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx) \quad \text{und} \quad v_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $\langle u,v\rangle$ ist ein Skalarprodukt auf V.

(b) Die Funktionen bilden ein Orthonormalsystem:

$$\langle u_k, u_l \rangle = \delta_{kl}, \quad \langle v_k, v_l \rangle = \delta_{kl}, \quad \langle u_k, v_l \rangle = 0.$$

(c) Die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ ist auf diesem System diagonal, also

$$b(u_k, u_l) = k^2 \delta_{kl}, \quad b(v_k, v_l) = k^2 \delta_{kl}, \quad b(u_k, v_l) = 0.$$

Hinweis. $C^1([-\pi, \pi])$ ist der Raum der Funktionen $u \in C^1((-\pi, \pi))$, für die u und u' stetig auf $[-\pi, \pi]$ fortsetzbar sind.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 13.6.2016 bis 12:00