
Aufgabe 1 *(Integrale mit variablen Grenzen)*
Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $I = [a, b]$. Die Funktion $f \in C^0(U \times I)$ sei nach $x \in U$ stetig partiell differenzierbar, also $\frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(U \times I)$. Beweisen Sie für differenzierbare Funktionen $\varphi, \psi : U \to (a, b)$ die Regel

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy + f\big(x, \psi(x)\big)\psi'(x) - f\big(x, \varphi(x)\big)\varphi'(x).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$\phi : U \times (a, b) \times (a, b) \to \mathbb{R},\ \phi(x, u, v) = \int_u^v f(x, y)\, dy,$$

und wenden Sie (mit Begründung) die Kettenregel an.

Aufgabe 2 *(Faltung)*
Sei $g \in C^1(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger, das heißt $\overline{\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}}$ ist kompakt. Überlegen Sie, dass für $f \in C^0(\mathbb{R})$ die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = \int f(y) g(x - y)\, dy$$

wohldefiniert und in $C^1(\mathbb{R})$ ist mit Ableitung $F'(x) = \int f(y) g'(x - y)\, dy$.

Aufgabe 3 *(Energieerhaltungssatz)*
Betrachten Sie die Bewegung eines Teilchens der Masse $m > 0$ in einem Potential $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, siehe Beispiele 22.4 und 22.6. Zeigen Sie, dass die Summe von kinetischer und potentieller Energie zeitlich konstant ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 20.6.2016 bis 12:00