Aufgabe 1 *(Beispiel zum Umkehrsatz)*
Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x + y + e^x, y^3)$$

bijektiv ist. Ist f ein Diffeomorphismus?

Aufgabe 2 *(Graphendarstellung)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \Omega$ und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$. Es sei $P \circ DF(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertierbar, wobei

$$P : \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},\ P(x,z) = x.$$

Zeigen Sie: es gibt einen C^1-Diffeomorphismus $\phi : U \to V$ zwischen zwischen offenen Umgebungen U von x_0 und V von $y_0 := P \circ F(x_0)$ sowie eine Funktion $u \in C^1(V)$, so dass gilt:

$$F \circ \phi^{-1}(y) = (y, u(y)) \quad \text{für alle } y \in V.$$

Bemerkung: Hat $DF(x_0)$ den Rang n, so ist $P \circ DF(x_0)$ invertierbar nach geeigneter Umnummerierung der Koordinaten.

Aufgabe 3 *(Mikrostrukturen)*
Betrachten Sie auf $I = (0,1)$ das Energiefunktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_I \big(1 - u'(t)^2\big)^2\,dt, \qquad \text{also } f(t,x,v) = (1 - v^2)^2.$$

Das Funktional ist für $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ stückweise C^1 definiert. Zeigen Sie:

(a) Alle Funktionen $u(t) = at + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, sind Lösungen der Euler-Lagrange Gleichung. Geben Sie die zugehörige Energie an.

(b) Jede C^2-Lösung der Euler-Lagrange Gleichung hat die Form $u(t) = at + b$.

(c) Es gibt unendlich viele u stückweise C^1 mit $u(0) = u(1) = 0$ und $\mathcal{F}(u) = 0$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 27.6.2016 bis 12:00