

20. Juli 2016

# A N A L Y S I S II

Sommersemester 2016

**Ernst Kuwert**

Mathematisches Institut  
Universität Freiburg



# Inhaltsverzeichnis

16	Topologie im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	1
17	Partielle Ableitungen . . . . .	9
18	Die Ableitung . . . . .	13
19	Schranksatz . . . . .	23
20	Extremwerte und konvexe Funktionen . . . . .	27
21	Taylorentwicklung . . . . .	33
22	Parameterabhängige Integrale . . . . .	41
23	Diffeomorphismen . . . . .	47
24	Implizite Funktionen . . . . .	53
25	Das Anfangswertproblem . . . . .	59
26	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	67
27	Separation der Variablen . . . . .	73
28	Kurvenintegrale und Gradientenfelder . . . . .	75



## 16 Topologie im $\mathbb{R}^n$

Das griechische Wort  $\tau\acute{o}\pi\omicron\varsigma$  bedeutet soviel wie Ort oder Lage. Mathematisch geht es in der Topologie um Mengen mit einem Konvergenzbegriff, sogenannte topologische Räume, und um die stetigen Abbildungen zwischen diesen Räumen. Das ist ein sehr allgemeiner Ansatz, wir werden uns hier auf metrische Räume konzentrieren. Unser Hauptziel ist dabei die Wiederholung der Konzepte im  $\mathbb{R}^n$ . Im Laufe der Vorlesung werden weitere Beispiele von metrischen Räumen eine Rolle spielen.

**Definition 16.1 (Metrischer Raum)** *Ein metrischer Raum ist eine Menge  $X$  mit einer Funktion  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ , die für alle  $x, y, z \in X$  folgende Eigenschaften hat:*

Positivität:  $d(x, y) \geq 0$  mit Gleichheit genau wenn  $x = y$ ,

Symmetrie:  $d(y, x) = d(x, y)$

Dreiecksungleichung:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Wir nennen  $d(x, y)$  auch den Abstand von  $x$  und  $y$ .

In dieser Definition kann  $X$  eine beliebige Menge sein, insbesondere muss  $X$  kein Vektorraum sein. Betrachten Sie als Beispiel die Menge  $X$  aller Bahnhöfe in Frankreich und

$$(16.1) \quad d(x, y) = \begin{cases} \text{minimale Fahrzeit von } x \text{ nach } y \text{ über Paris} & \text{für } x \neq y, \\ 0 & \text{für } x = y. \end{cases}$$

Viele interessante metrische Räume sind normierte Vektorräume.

**Definition 16.2 (Norm)** *Eine Norm auf dem reellen (oder komplexen) Vektorraum  $X$  ist eine Funktion  $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften:*

Positivität:  $\|x\| \geq 0$ , mit Gleichheit genau wenn  $x = 0$ .

Halblinearitat:  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $x \in X$ .

Dreiecksungleichung:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  für alle  $x, y \in X$ .

Das wichtigste Beispiel ist natürlich die Euklidische Norm auf dem  $\mathbb{R}^n$ :

$$(16.2) \quad |x| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Wir verwenden oft doppelte Betragstriche, einfache jedoch für die Euklidische Norm, auf  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist diese ja gleich dem Betrag, also keine Verwechslungsgefahr. Positivität und Halblinearitat sind für die Euklidische Norm klar, die Dreiecksungleichung folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, siehe Analysis I, Satz 5.4. Andere Normen auf  $\mathbb{R}^n$  sind zum Beispiel die 1-Norm und die Maximumnorm

$$(16.3) \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Jeder normierte Vektorraum  $(X, \|\cdot\|)$  wird zu einem metrischen Raum, indem wir den Abstand von zwei Punkten  $x, y$  erklären durch

$$(16.4) \quad d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{für } x, y \in X.$$

Denn offensichtlich gilt  $d(x, y) \geq 0$  mit Gleichheit nur für  $x = y$ , sowie

$$\begin{aligned} d(y, x) &= \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |(-1)| \|x - y\| = d(x, y), \\ d(x, z) &= \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $\mathbb{R}^n$  ein metrischer Raum mit dem üblichen euklidischen Abstandsbegriff.

**Definition 16.3** Sei  $X$  ein metrischer Raum. Die offene Kugel um  $x_0$  mit Radius  $r > 0$  ist

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Bezüglich der Euklidischen Norm auf  $\mathbb{R}^n$  gilt also wie gewohnt

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}.$$

Es ist instruktiv, sich die Kugeln  $B_r(x_0)$  für die französische Eisenbahnmetrik aus (16.1) sowie die Kugeln  $B_1(0)$  für die Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_\infty$  auf  $\mathbb{R}^n$  zu überlegen.

**Definition 16.4 (Offene Mengen)** Sei  $X$  ein metrischer Raum. Eine Menge  $\Omega \subset X$  heißt offen, falls zu jedem  $x \in \Omega$  ein  $\varepsilon > 0$  existiert mit  $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ .

**Beispiel 16.1** Die Kugel  $B_r(x_0)$  ist offen in  $X$ , vgl. Analysis I, Beispiel 5.3. Sei nämlich  $x \in B_r(x_0)$  gegeben. Dann ist  $\varepsilon = r - d(x, x_0) > 0$  und für  $y \in B_\varepsilon(x)$  folgt

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \varepsilon + d(x, x_0) = r,$$

also  $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$ , was zu zeigen war.

**Satz 16.1 (Topologie)** Das System der offenen Teilmengen eines metrischen Raums  $X$  bildet eine Topologie, das heißt es gelten folgende Eigenschaften:

- (a)  $\emptyset, X$  sind offen.
- (b) Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.
- (c) Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.

BEWEIS: (vgl. Analysis I, Satz 5.8) Aussage (a) ist klar. Für (b) sei  $x \in \bigcap_{i=1}^N \Omega_i$ , wobei  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  endlich viele offene Teilmengen von  $X$  sind. Dann gibt es  $\varepsilon_i > 0$  mit  $B_{\varepsilon_i}(x) \subset \Omega_i$ . Es folgt  $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq N} \varepsilon_i > 0$  sowie  $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_i}(x) \subset \Omega_i$  für jedes  $i$ , das heißt  $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^N \Omega_i$ .

Für (c) sei nun  $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$ , wobei  $\Lambda$  eine beliebige Indexmenge ist. Dann ist  $x \in \Omega_{\lambda_0}$  für (mindestens) ein  $\lambda_0 \in \Lambda$ . Da  $\Omega_{\lambda_0}$  offen, gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(x) \subset \Omega_{\lambda_0}$ , also erst recht  $B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$ .  $\square$

Ein abzählbarer Schnitt von offenen Mengen muss nicht offen sein. Zum Beispiel sind die Kugeln  $B_{\frac{1}{n}}(0)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , offen im  $\mathbb{R}^n$ , nicht aber der Schnitt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(0) = \{0\}.$$

Eine offene Menge  $\Omega \subset X$  mit  $x \in \Omega$  nennt man auch offene Umgebung von  $x$ . Insbesondere wird die offene Kugel  $B_{\varepsilon}(x)$  als  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  bezeichnet.

**Lemma 16.1 (Hausdorff-Trennungseigenschaft)** *In einem metrischen Raum  $X$  gibt es zu zwei Punkten  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B_{\varepsilon}(x) \cap B_{\varepsilon}(y) = \emptyset$ .*

BEWEIS: Sei  $z \in B_{\varepsilon}(x) \cap B_{\varepsilon}(y)$ . Dann folgt  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2\varepsilon$ . Also ist die Behauptung richtig für jedes  $\varepsilon \leq \frac{1}{2}d(x, y)$ .  $\square$

**Definition 16.5 (Konvergenz)** *Sei  $X$  ein metrischer Raum. Die Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Punkten  $x_k \in X$  konvergiert gegen  $x \in X$ , falls gilt:*

*Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $K \in \mathbb{R}$  mit  $x_k \in B_{\varepsilon}(x)$  für alle  $k > K$ .*

*Äquivalent dazu ist  $d(x_k, x) \rightarrow 0$  mit  $k \rightarrow \infty$ .*

Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt, denn wäre  $y \neq x$  ebenfalls Grenzwert von  $(x_k)$ , so wählen wir  $\varepsilon > 0$  wie in Lemma 16.1 und erhalten für  $k$  hinreichend groß den Widerspruch

$$x_k \in B_{\varepsilon}(x) \cap B_{\varepsilon}(y) = \emptyset.$$

**Definition 16.6 (abgeschlossene Teilmenge)** *Eine Teilmenge  $A$  eines metrischen Raums  $X$  heißt abgeschlossen, wenn folgende Implikation stets gilt:*

$$x_k \in A, \quad x_k \rightarrow x \quad \Rightarrow \quad x \in A.$$

Die Eigenschaften *offen* und *abgeschlossen* sind nicht Gegensätze. Die leere Menge und der ganze Raum  $X$  sind sowohl offen als auch abgeschlossen. Es gilt aber folgende Komplementarität.

**Satz 16.2** *In einem metrischen Raum  $X$  gilt für jede Menge  $M \subset X$ :*

$$M \text{ offen} \quad \Leftrightarrow \quad X \setminus M \text{ abgeschlossen}.$$

BEWEIS: Im Fall  $X = \mathbb{R}^n$  wurde das in Analysis I, Satz 5.7, gezeigt. Das Argument gilt analog für jeden metrischen Raum  $X$ .  $\square$

**Folgerung 16.1** *Für die abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums  $X$  gilt:*

- a)  $\emptyset, X$  sind abgeschlossen.
- b) Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.
- c) Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

BEWEIS: Folgt aus Satz 16.1 und Satz 16.2. □

Die Vereinigung von unendlich vielen abgeschlossenen Mengen ist nicht notwendig abgeschlossen, zum Beispiel  $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1] = (0, 1] \subset \mathbb{R}$ .

**Beispiel 16.2 (induzierte Metrik)** Ist  $(X, d)$  metrischer Raum, so ist jede Teilmenge  $M \subset X$  selbst ein metrischer Raum mit der induzierten Abstandsfunktion

$$(16.5) \quad d_M : M \times M \rightarrow [0, \infty), \quad d_M(x, y) = d(x, y).$$

Zum Beispiel ist die Sphäre  $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$  ein metrischer Raum mit dem Euklidischen Abstand  $d_{\mathbb{S}^{n-1}}(x, y) = |x - y|$ . Für die Kugeln bezüglich der induzierten Abstandsfunktion gilt allgemein

$$B_r^M(x) = \{y \in M : d_M(y, x) < r\} = \{y \in M : d(y, x) < r\} = M \cap B_r(x).$$

Die offenen Mengen in  $(M, d_M)$  sind genau die Mengen  $M \cap \tilde{U}$  mit  $\tilde{U}$  offen in  $X$ . Denn ist  $x \in M \cap \tilde{U}$ , so gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(x) \subset \tilde{U}$ , also  $B_\varepsilon^M(x) \subset M \cap \tilde{U}$ . Die Mengen des Typs sind also offen. Ist umgekehrt  $U \subset (M, d_M)$  eine beliebige offene Menge, so gibt es zu jedem  $x \in U$  ein  $\varepsilon(x) > 0$  mit  $B_{\varepsilon(x)}^M(x) \subset U$ . Es folgt

$$U = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon(x)}^M(x) = \bigcup_{x \in U} M \cap B_{\varepsilon(x)}(x) = M \cap \underbrace{\bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon(x)}(x)}_{\text{offen in } X}.$$

Weiter gilt: die abgeschlossenen Mengen in  $(M, d_M)$  sind genau von der Form  $M \cap \tilde{A}$  mit  $\tilde{A}$  abgeschlossen in  $X$ . Denn es gilt

$$M \setminus (M \cap \tilde{A}) = M \cap (X \setminus \tilde{A}) = \text{offen in } M.$$

Also  $M \cap \tilde{A}$  abgeschlossen in  $M$  nach Satz 16.2. Und jede in  $M$  abgeschlossene Menge hat diese Form, denn für  $\tilde{U}$  offen in  $X$  ist

$$A = M \setminus (M \cap \tilde{U}) = M \cap \underbrace{(X \setminus \tilde{U})}_{\text{abg. in } X}.$$

In der eindimensionalen Analysis wurden meist Funktionen auf einem Intervall  $I$  mit Randpunkten  $a < b$  betrachtet. Im mehrdimensionalen Fall werden wir oft Kugeln  $B_r(x)$  oder achsenparallele Quader  $I_1 \times \dots \times I_n$  betrachten, bisweilen aber auch kompliziertere Mengen. Dafür sind die folgenden Begriffe nützlich.

**Definition 16.7** Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $M \subset X$ . Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \text{int } M &= \{x \in M : \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } B_\varepsilon(x) \subset M\} \quad (\text{Menge der inneren Punkte von } M), \\ \overline{M} &= \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 \text{ ist } B_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset\} \quad (\text{Abschluss von } M), \\ \partial M &= \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 \text{ sind } B_\varepsilon(x) \cap M, B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset\} \quad (\text{Rand von } M). \end{aligned}$$

Trivialerweise gilt  $\text{int } M \subset M \subset \overline{M}$ . Außerdem ist  $\text{int } \Omega = \Omega$  für  $\Omega \subset X$  offen sowie  $\overline{M} = M$  für  $M \subset X$  abgeschlossen.

**Beispiel 16.3** Auf dem  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Abstandsfunktion  $d(x, y) = |x - y|$  gilt für die Kugel  $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, x) < r\}$ :

$$\overline{B_r(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, x) \leq r\} \quad \text{und} \quad \partial B_r(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(y, x) = r\}.$$

Beweis Übungsaufgabe.

**Satz 16.3** Sei  $M$  Teilmenge des metrischen Raums  $X$ .

(a)  $\text{int } M$  ist offen, und es gilt die Implikation

$$\Omega \text{ offen, } \Omega \subset M \quad \Rightarrow \quad \Omega \subset \text{int } M.$$

(b)  $\overline{M}$  ist abgeschlossen, und es gilt die Implikation

$$A \text{ abgeschlossen, } A \supset M \quad \Rightarrow \quad A \supset \overline{M}.$$

(c)  $\partial M$  ist abgeschlossen und es gilt  $\partial M = \overline{M} \setminus \text{int } M$ .

BEWEIS: Für (a) sei  $x \in \text{int } M$ , also  $B_r(x) \subset M$  für ein  $r > 0$ . Für  $y \in B_r(x)$  gilt dann  $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x) \subset M$  mit  $\varepsilon = r - d(y, x) > 0$ , vgl. Beispiel 16.1. Es folgt  $B_r(x) \subset \text{int } M$ , damit ist  $\text{int } M$  offen. Sei nun  $\Omega$  offen und  $\Omega \subset M$ . Zu  $x \in \Omega$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ , also auch  $B_\varepsilon(x) \subset M$ , das heißt  $x \in \text{int } M$ .

Für (b) verwenden wir (a) und Satz 16.2. Nach Definition ist  $X \setminus \overline{M} = \text{int}(X \setminus M)$ , also ist  $\overline{M} = X \setminus \text{int}(X \setminus M)$  abgeschlossen. Ist nun  $A \subset X$  eine beliebige abgeschlossene Menge mit  $A \supset M$ , so ist  $X \setminus A$  offen sowie  $X \setminus A \subset X \setminus M$ , also  $X \setminus A \subset \text{int}(X \setminus M)$  nach (a), und somit  $A \supset \overline{M}$ . Dies beweist (b).

Nach Definition gilt weiter  $\partial M = \overline{M} \cap \overline{(X \setminus M)}$ , also ist  $\partial M$  abgeschlossen nach (b) und Folgerung 16.1. Ferner ist ebenfalls nach Definition  $X \setminus \text{int } M = \overline{X \setminus M}$ , folglich

$$\partial M = \overline{M} \cap (X \setminus \text{int } M) = \overline{M} \setminus \text{int } M.$$

□

Im Abschluss von  $M$  können noch zwei Sorten Punkte unterschieden werden, die Häufungspunkte und die isolierten Punkte.

**Definition 16.8** Ein Punkt  $x \in X$  heißt

Häufungspunkt von  $M \Leftrightarrow$  für jedes  $\varepsilon > 0$  ist  $M \cap B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$  nichtleer,

isolierter Punkt von  $M \Leftrightarrow$  es gibt ein  $\varepsilon > 0$  mit  $M \cap B_\varepsilon(x) = \{x\}$ .

Ist  $x \in X$  Häufungspunkt von  $M$ , so enthält  $B_\varepsilon(x) \cap M \setminus \{x\}$  sogar unendlich viele Punkte. Denn würde die Menge nur aus endlich vielen Punkten  $y_1, \dots, y_N$  bestehen, so ist  $\delta = \min_{1 \leq i \leq N} d(y_i, x) > 0$  und dann  $B_\delta(x) \cap M \setminus \{x\} = \emptyset$ , ein Widerspruch. Insbesondere können wir eine Folge  $x_k \in M \setminus \{x\}$  bestimmen mit  $x_k \rightarrow x$ .

**Definition 16.9** Eine Teilmenge  $M$  eines metrischen Raums  $X$  heißt dicht, falls  $\overline{M} = X$ .

Bekanntes Beispiel sind die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  im metrischen Raum  $\mathbb{R}$ , beziehungsweise die rationalen Punkte  $\mathbb{Q}^n$  im  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 16.10 (Stetigkeit)** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen heißt stetig im Punkt  $x_0 \in X$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt mit

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } d(x, x_0) < \delta,$$

oder äquivalent mit  $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$ . Die Funktion  $f$  heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt  $x_0 \in X$  stetig ist.

Wir müssten hier eigentlich  $d_X(\cdot, \cdot)$  und  $d_Y(\cdot, \cdot)$  schreiben, denn im allgemeinen sind  $X$  und  $Y$  verschiedene metrische Räume, jedoch führt die einfachere Notation nicht zu Missverständnissen.

**Definition 16.11 (Lipschitzstetigkeit)** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt Lipschitzstetig mit Konstante  $L \geq 0$ , falls

$$d(f(x), f(x')) \leq L d(x, x') \quad \text{für alle } x, x' \in X.$$

**Beispiel 16.4** Die Abstandsfunktion von einem Punkt  $x_0 \in X$ , das heißt

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = d(x, x_0),$$

ist Lipschitzstetig mit Konstante  $L = 1$ , denn aus der Dreiecksungleichung folgt

$$f(x) = d(x, x_0) \leq d(x, x') + d(x', x_0) = d(x, x') + f(x').$$

Durch Vertauschen von  $x$  und  $x'$  folgt  $|f(x) - f(x')| \leq d(x, x')$  wie gewünscht.

Die folgende Umformulierung der Stetigkeit ist unverzichtbar in allgemeinen topologischen Räumen.

**Satz 16.4 (Charakterisierung stetiger Abbildungen)** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge  $V \subset Y$  das Urbild  $f^{-1}(V)$  offen in  $X$  ist.

BEWEIS: Sei  $f$  stetig,  $V \subset Y$  offen und  $x_0 \in f^{-1}(V)$ . Dann ist  $y_0 = f(x_0) \in V$ , also gilt  $B_\varepsilon(y_0) \subset V$  für geeignetes  $\varepsilon > 0$ . Es gibt dann ein  $\delta > 0$  mit  $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(y_0) \subset V$ , also  $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(V)$  wie verlangt.

Umgekehrt sei  $y_0 = f(x_0)$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben. Nach Voraussetzung ist dann  $f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$  offen, das heißt es gibt ein  $\delta > 0$  mit  $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$  beziehungsweise  $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(y_0)$ .  $\square$

Im Gegensatz zur Definition 16.10 der Stetigkeit, die in jedem Punkt des Definitionsbereichs einzeln überprüft werden kann, bezieht sich Satz 16.4 auf die Funktion als Ganzes, die Charakterisierung ist nicht lokal.

Aus Analysis 1 wissen wir, dass es neben *offen* und *abgeschlossenen* Mengen eine dritte wichtige Klasse gibt.

**Definition 16.12 (Folgenkompaktheit)** Ein metrischer Raum  $X$  heißt folgenkompakt, wenn jede Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $X$  eine Teilfolge  $(x_{k_p})_{p \in \mathbb{N}}$  hat, die gegen ein  $x \in X$  konvergiert.

Eine alternative Charakterisierung der Kompaktheit mittels Überdeckungen kommt später. Zunächst beziehen wir uns stets auf Definition 16.12. Jede Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist metrischer Raum mit der induzierten, also Euklidischen Metrik. Das folgende nützliche Kriterium wurde in Analysis I, Satz 10.2, gezeigt.

**Satz 16.5 (Kompaktheit im  $\mathbb{R}^n$ )** *Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Diese Aussage ist in vielen metrischen Räumen falsch, das heißt es kann abgeschlossene und beschränkte Mengen geben, die nicht kompakt sind. Folgende Aussagen über Stetigkeit und kompakte Mengen sind oft nützlich.

**Satz 16.6 (Bilder kompakter Mengen)** *Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen, und  $X$  sei kompakt. Dann gilt:*

- (1)  $f(X)$  ist kompakte Teilmenge von  $Y$ .
- (2) Ist  $f$  injektiv, so ist  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  stetig.

BEWEIS: Sei  $(y_k)$  eine Folge in  $M = f(X)$ , also  $y_k = f(x_k)$ . Da  $X$  kompakt, gibt es eine Teilfolge mit  $x_{k_j} \rightarrow x \in X$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt  $y_{k_j} = f(x_{k_j}) \rightarrow f(x) \in M$ .

Sei nun  $f$  injektiv. Angenommen  $f^{-1}$  ist in  $y = f(x)$  unstetig. In metrischen Räumen kann Stetigkeit über Folgen definiert werden, vgl. Satz 7.1 in Analysis I. Also gibt es eine Folge  $y_k = f(x_k)$  mit  $y_k \rightarrow y$ , aber  $d_X(x_k, x) \geq \varepsilon$  für alle  $k$ . Da  $X$  kompakt, gibt es eine Teilfolge  $x_{k_j} \rightarrow x' \in X$  und es gilt  $d(x', x) \geq \varepsilon$ . Aber  $f$  ist stetig in  $x'$ , also  $f(x') = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}) = y$ , im Widerspruch zur Injektivität von  $f$ .  $\square$

**Satz 16.7 (Extrema)** *Eine stetige Funktion auf einem kompakten metrischen Raum  $X$  ist beschränkt und nimmt ihr Infimum und Supremum an.*

BEWEIS: vgl. Analysis I, Satz 10.1.  $\square$

**Beispiel 16.5** Sei  $X$  metrischer Raum und  $K \subset X$  kompakt. Dann gibt es zu jedem  $x_0 \in X$  einen nächsten Punkt  $x \in K$ , das heißt

$$d(x, x_0) = \inf_{y \in K} d(y, x_0) = \text{dist}(x_0, K).$$

Der Punkt  $x$  ist nicht notwendig eindeutig, betrachte etwa  $K = \{1, -1\} \subset \mathbb{R}$  und  $x_0 = 0$ .

**Satz 16.8 (Gleichmäßige Stetigkeit)** *Sei  $X$  kompakter metrischer Raum. Dann ist jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  sogar gleichmäßig stetig.*

BEWEIS: vgl. Satz 14.4 in Analysis I. Wäre  $f$  nicht gleichmäßig stetig, so gibt es ein  $\varepsilon > 0$  und  $x_n, x'_n \in X$  mit  $d(x_n, x'_n) \rightarrow 0$ , aber  $d(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$ . Da  $X$  kompakt, konvergiert die Folge  $x_n$  nach evtl. Auswahl einer Teilfolge gegen ein  $x \in X$ . Wegen  $d(x'_n, x) \leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, x)$  konvergiert dann auch die Folge  $x'_n$  gegen  $x$ , und es gilt aufgrund der Stetigkeit

$$\varepsilon \leq d(f(x_n), f(x'_n)) \leq d(f(x_n), f(x)) + d(f(x), f(x'_n)) \rightarrow 0,$$

ein Widerspruch.  $\square$

**Definition 16.13 (Zusammenhang)** Ein metrischer Raum  $X$  heißt zusammenhängend, wenn folgende Implikation gilt: ist  $E \subset X$  nichtleer, abgeschlossen und offen, so ist  $E = X$ .

Mithilfe von Funktionen kann das auch anders beschreiben werden. Und zwar heißt  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  lokal konstant, wenn jedes  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U$  hat mit  $f|_U$  konstant. Damit gilt

**Lemma 16.2** Für einen metrischen Raum sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a)  $X$  ist zusammenhängend.
- (b) Jede lokal konstante Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ist konstant.

BEWEIS: Es gelte (a), und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sei lokal konstant. Wähle  $x_0 \in E$  und setze  $E = \{x \in X : f(x) = f(x_0)\}$ . Dann ist  $E \neq \emptyset$  wegen  $x_0 \in E$ . Ist  $x \in E$  und  $U$  offene Umgebung mit  $f|_U$  konstant, so folgt  $f|_U = f(x) = f(x_0)$ , also  $U \subset E$ . Andererseits ist  $f$  stetig, also folgt aus  $E \ni x_k \rightarrow x$  auch  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$ . Aus (a) folgt nun  $E = X$ , also  $f(x) = f(x_0)$  für alle  $x \in X$ .

Jetzt sei (b) vorausgesetzt, und es sei  $E \subset X$  nichtleer, offen und abgeschlossen. Betrachte dann die Funktion

$$\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}, \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in E, \\ 0 & \text{für } x \notin E. \end{cases}$$

Da  $E$  und  $X \setminus E$  offen sind, ist  $\chi_E$  lokal konstant und damit konstant. Da  $E$  nichtleer, folgt  $E = X$ , das heißt  $X$  ist zusammenhängend.  $\square$

**Satz 16.9 (zusammenhängende Mengen in  $\mathbb{R}$ )** Eine Menge  $X \subset \mathbb{R}$  ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein (verallgemeinertes) Intervall ist.

BEWEIS:  $X$  ist metrischer Raum mit dem Euklidischen Abstand. Ist  $X$  verallgemeinertes Intervall und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  lokal konstant, so folgt  $f' = 0$ , also  $f$  konstant nach dem Mittelwertsatz, siehe Folgerung 10.1 in Analysis 1. Nach Lemma 16.2 ist  $X$  zusammenhängend.

Sei umgekehrt  $X$  zusammenhängend und  $a = \inf X$ ,  $b = \sup X$ . Wir zeigen  $x_0 \in X$  für alle  $x_0 \in (a, b)$ . Die Mengen  $X \cap (-\infty, x_0)$  und  $X \cap (x_0, \infty)$  sind relativ offen in  $X$ , und beide nichtleer. Wäre  $x_0 \notin X$ , so ist  $X \cap (-\infty, x_0) = X \setminus (x_0, \infty)$  abgeschlossen in  $X$ , und es folgt  $X \subset (-\infty, x_0)$ , ein Widerspruch. Somit ist  $(a, b) \subset X$ , also ist  $X$  verallgemeinertes Intervall.  $\square$

**Lemma 16.3** Seien  $X, Y$  metrische Räume. Ist  $X$  zusammenhängend und  $f : X \rightarrow Y$  stetig, so ist  $f(X)$  auch zusammenhängend.

BEWEIS: Sei  $g : f(X) \rightarrow \mathbb{R}$  lokal konstant, das heißt zu  $x \in X$  gibt es eine offene Umgebung  $V \subset Y$  von  $f(x)$  mit  $g|_{f(X) \cap V}$  konstant. Dann ist  $g \circ f$  konstant auf  $f^{-1}(V) \ni x$ . Da  $X$  zusammenhängend ist  $g \circ f$  konstant, und damit ist  $g : f(X) \rightarrow \mathbb{R}$  konstant.  $\square$

Aus dem Lemma und Satz 16.9 ergibt sich der Zwischenwertsatz, in folgender Form.

**Folgerung 16.2** Ist  $X$  zusammenhängend und  $f \in C^0(X)$ , so ist  $f(X)$  ein Intervall.

## 17 Partielle Ableitungen

Für Funktionen auf dem  $\mathbb{R}^n$  gibt es mehrere Ableitungskonzepte. Die partiellen Ableitungen sind am einfachsten, es sind die eindimensionalen Ableitungen in Richtung der Koordinatenachsen. Im Folgenden bezeichnet  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$ , also  $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  mit der 1 an der  $j$ -ten Stelle.

**Definition 17.1** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Die partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_j$  an der Stelle  $x \in \Omega$  ist der Grenzwert (falls existent)

$$\partial_j f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = \left. \frac{d}{dt} f(x + te_j) \right|_{t=0}.$$

Andere Bezeichnungen:  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$  oder  $f_{x_j}(x)$ .

Sei lokal  $f$  auf einem Quader  $\Omega = I_1 \times \dots \times I_n$  gegeben. Halten wir alle  $x_k \in I_k$  fest mit Ausnahme von  $k = j$ , so ergibt sich die Funktion einer reellen Variablen

$$f_{x,j} : I_j \rightarrow \mathbb{R}, f_{x,j}(x_j) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

Die gewöhnliche eindimensionale Ableitung von  $f_{x,j}$  ist

$$f'_{x,j}(x_j) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{x,j}(x_j + h) - f_{x,j}(x_j)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h} = \partial_j f(x).$$

Bei der Berechnung der partiellen Ableitung  $\partial_j f$  können wir also die gewohnte eindimensionale Ableitung nach  $x_j$  bilden und dabei die anderen Variablen als Konstanten behandeln.

Die wohlbekanntenen Differentiationsregeln für Funktionen einer Variablen ergeben in diesem Kontext direkt folgende Aussagen.

**Satz 17.1 (Ableitungsregeln)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $x \in \Omega$ . Die Existenz der partiellen Ableitungen  $\partial_j f(x)$  und  $\partial_j g(x)$  sei hier stets vorausgesetzt. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) Linearität: für  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt

$$\partial_j(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \partial_j f(x) + \beta \partial_j g(x).$$

(b) Komponentenweise Differentiation: für  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  gilt, wenn eine der Seiten existiert,

$$\partial_j f(x) = \sum_{i=1}^m \partial_j f_i(x) e_i.$$

(c) Produktregel: für  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\partial_j(fg)(x) = (\partial_j f)(x)g(x) + f(x)(\partial_j g)(x).$$

(d) Quotientenregel: für  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) \neq 0$  gilt

$$\partial_j \left( \frac{f}{g} \right) (x) = \frac{(\partial_j f)(x)g(x) - f(x)(\partial_j g)(x)}{g(x)^2}.$$

(e) Kettenregel: sei  $f$  reellwertig. Ist  $I$  offenes Intervall mit  $f(\Omega) \subset I$  und  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, so gilt

$$\partial_j(\varphi \circ f)(x) = \varphi'(f(x))\partial_j f(x).$$

**Beispiel 17.1** Wir betrachten die Euklidische Abstandsfunktion vom Nullpunkt

$$r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, r(x) = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

In  $x \neq 0$  existieren die partiellen Ableitungen, und zwar gilt mit der Kettenregel

$$\partial_j r(x) = \frac{2x_j}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_j}{r} \quad \text{für } r = r(x) = |x|.$$

Im Nullpunkt sind die partiellen Ableitungen dagegen nicht definiert, denn  $r(0 + te_i) = |t|$  ist in  $t = 0$  nicht differenzierbar. Die Funktion  $\partial_j r$  ist in  $x \neq 0$  wieder partiell differenzierbar, und wir erhalten mit der Quotientenregel die zweiten partiellen Ableitungen

$$\partial_i(\partial_j r)(x) = \frac{(\partial_i x_j)r - x_j \partial_i r}{r^2} = \frac{1}{r} \left( \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2} \right).$$

Ist  $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar, so berechnen wir weiter für  $f = \varphi \circ r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\partial_j f(x) = \varphi'(r)\partial_j r = \varphi'(r)\frac{x_j}{r},$$

$$\partial_i(\partial_j f)(x) = \varphi''(r)\partial_i r \partial_j r + \varphi'(r)\partial_i(\partial_j r) = \varphi''(r)\frac{x_i x_j}{r^2} + \frac{\varphi'(r)}{r} \left( \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2} \right).$$

Wir betrachten nun den Laplaceoperator  $\Delta f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f$ . Die Gleichung  $\Delta f = 0$  spielt in der komplexen Analysis, der Theorie der Minimalflächen und der Elektrostatik eine zentrale Rolle, ihre Lösungen heißen harmonische Funktionen. Wir rechnen jetzt die rotationssymmetrischen harmonischen Funktionen aus, und zwar erhalten wir die Gleichung

$$0 \stackrel{!}{=} \Delta f(x) = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) = r^{1-n}(r^{n-1}\varphi'(r))'.$$

Diese Gleichung hat die Lösungen, mit Integrationskonstanten  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi(r) = \begin{cases} a \frac{r^{2-n}}{2-n} + b & \text{für } n \geq 3 \\ a \log r + b & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Für  $n = 3$  ist  $f(x) = -\frac{1}{r}$  das Coulombpotential einer Punktladung.

Wir wollen zweite und höhere partielle Ableitung nochmal allgemein einführen. Sei für  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  die Ableitungsfunktion  $\partial_j f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  erklärt. Ist diese im Punkte  $x \in \Omega$  nach  $x_i$  partiell differenzierbar, so setzen wir

$$(17.1) \quad \partial_{ij}^2 f(x) := \partial_i(\partial_j f)(x) \quad (\text{alternative Notation } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \text{ oder } f_{x_i x_j}(x)).$$

Entsprechend für Ableitungen beliebiger Ordnung: ist für  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$  die Ableitungsfunktion  $\partial_{i_1 \dots i_k}^k f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert und ist diese in  $x \in \Omega$  nach  $x_i$  partiell differenzierbar, so setzen wir

$$(17.2) \quad \partial_{i_1 \dots i_k}^{k+1} f(x) = \partial_i(\partial_{i_1 \dots i_k}^k f)(x).$$

Die folgenden Klassen von Funktionen spielen in der Analysis eine wichtige Rolle. Die Tatsache, dass die partiellen Ableitungen nicht nur existieren sondern auch stetig sind, ist in nahezu allen Anwendungen wesentlich.

**Definition 17.2 ( $C^k$ -Räume)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ . Wir bezeichnen mit  $C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$  die Menge aller  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf  $\Omega$  mit Werten im  $\mathbb{R}^m$ , das heißt alle Ableitungen  $\partial_{i_1 \dots i_j}^j f$  der Ordnung  $j \leq k$  (bzw.  $j < \infty$  im Fall  $k = \infty$ ) sind definiert und stetig auf  $\Omega$ . Im reellwertigen Fall, also  $m = 1$ , setzen wir  $C^k(\Omega, \mathbb{R}) = C^k(\Omega)$ .

Wir wollen nun zeigen, dass die Operatoren  $\partial_i$  und  $\partial_j$  auf  $C^2$ -Funktionen vertauschen. Aus der Existenz der partiellen Ableitungen  $\partial_i \partial_j f$  und  $\partial_j \partial_i f$  allein folgt das nicht:

$$(17.3) \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für diese Funktion ist  $\partial_1 \partial_2 f(0, 0) = 1$ , aber  $\partial_2 \partial_1 f(0, 0) = -1$ . Beide Ableitungen existieren, aber sie sind nicht gleich.

**Satz 17.2 (von Schwarz)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Ist  $f \in C^2(\Omega)$ , so vertauschen für  $1 \leq i, j \leq n$  die Ableitungen nach  $x_i$  und  $x_j$ :

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f \quad \text{auf } \Omega.$$

BEWEIS: Für  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Ableitung  $\partial_i g(x)$  Grenzwert der Differenzenquotienten  $\Delta_i^s g(x) = \frac{1}{s}(g(x + se_i) - g(x))$  für  $s \rightarrow 0$ . Wir betrachten den zweifachen Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \Delta_i^s(\Delta_j^t f)(x) &= \frac{1}{s}(\Delta_j^t f(x + se_i) - \Delta_j^t f(x)) \\ &= \frac{f(x + se_i + te_j) - f(x + se_i) - f(x + te_j) + f(x)}{st}. \end{aligned}$$

Offenbar gilt  $\Delta_i^s(\Delta_j^t f)(x) = \Delta_j^t(\Delta_i^s f)(x)$ . Es reicht also für  $s, t > 0$  zu zeigen:

$$\lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} \Delta_i^s(\Delta_j^t f)(x) = \partial_j(\partial_i f)(x).$$

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert allgemein die Darstellung

$$(\Delta_i^s g)(x) = \frac{d}{ds} g(x + se_i)|_{s=\sigma} = \partial_i g(x + \sigma e_i) \quad \text{für ein } \sigma \in [0, s].$$

Um das auf  $g = \Delta_j^t f$  anzuwenden, berechnen wir die Ableitung

$$\partial_i(\Delta_j^t f)(x) = \frac{d}{ds} \frac{f(x + se_i + te_j) - f(x + se_i)}{t} \Big|_{s=0} = \frac{\partial_i f(x + te_j) - \partial_i f(x)}{t} = \Delta_j^t(\partial_i f)(x).$$

Wir wenden den Mittelwertsatz zweimal an. Es gibt dann  $\sigma \in [0, s]$ ,  $\tau \in [0, t]$  mit

$$\Delta_i^s(\Delta_j^t f)(x) = \partial_i(\Delta_j^t f)(x + \sigma e_i) = \Delta_j^t(\partial_i f)(x + \sigma e_i) = \partial_j(\partial_i f)(x + \sigma e_i + \tau e_j).$$

Da  $\partial_j(\partial_i f)$  stetig im Punkt  $x$  ist, folgt  $\Delta_i^s(\Delta_j^t f)(x) \rightarrow \partial_j(\partial_i f)(x)$  wie behauptet.  $\square$

**Folgerung 17.1** Für eine Funktion  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$  vertauschen die partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $k$ , das heißt für jede Permutation  $\sigma \in S_k$  gilt

$$\partial_{i_{\sigma(1)}} \dots \partial_{i_{\sigma(k)}} f = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f.$$

BEWEIS: Nach Satz 17.2 können benachbarte Operatoren  $\partial_i, \partial_j$  vertauscht werden. Die symmetrische Gruppe wird durch Vertauschungen erzeugt (siehe Lineare Algebra).  $\square$

Der Begriff der partiellen Ableitung allein ist nicht geeignet, um die mehrdimensionale Differentialrechnung zu entwickeln. Entscheidendes Manko ist, dass aus der Existenz der partiellen Ableitungen  $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$  in  $x \in \Omega$  nicht die Stetigkeit von  $f$  im Punkt  $x$  folgt.

**Beispiel 17.2** Sei  $\Omega = \mathbb{R}^2$  und

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann gilt  $f(x, 0) = 0 = f(0, y)$ , insbesondere  $\partial_1 f(0, 0) = 0 = \partial_2 f(0, 0)$ . Aber für  $c(t) = (t, t)$  gilt  $f(c(t)) = 1/2$  für alle  $t \neq 0$ , das heißt  $f$  ist nicht stetig im Nullpunkt.

Also kann die Verkettung  $f \circ c$  mit einer Kurve unstetig sein. Aber dann ist  $f \circ c$  auch nicht differenzierbar, siehe Analysis I, Satz 9.1, und eine Kettenregel kann es nicht geben. Die Definition der partiellen Ableitungen macht explizit von den Koordinaten auf  $\mathbb{R}^n$  Gebrauch. Es wäre denkbar, dass sich ein besserer Ableitungsbegriff ergibt, wenn alle Richtungen gleichberechtigt betrachtet werden. Dies führt auf den Begriff der Richtungsableitung.

**Definition 17.3 (Richtungsableitung)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Die Richtungsableitung von  $f$  an der Stelle  $x \in \Omega$  in Richtung  $v \in \mathbb{R}^n$  ist der Grenzwert (falls existent)

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \frac{d}{dt} f(x + tv)|_{t=0}.$$

**Beispiel 17.3** Die Richtungsableitung von  $r(x) = |x|$  in  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  in Richtung  $v \in \mathbb{R}^n$  ist

$$\partial_v r(x) = \frac{d}{dt} \sqrt{|x|^2 + 2t\langle x, v \rangle + t^2|v|^2} |_{t=0} = \left\langle \frac{x}{|x|}, v \right\rangle.$$

Es gibt aber wieder schlechte Nachrichten: selbst wenn in  $x \in \Omega$  alle Richtungsableitungen existieren, kann die Funktion im Punkt  $x$  trotzdem unstetig sein.

**Beispiel 17.4** Betrachte jetzt auf  $\Omega = \mathbb{R}^2$  die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann existieren im Punkt  $(0, 0)$  alle Richtungsableitungen, denn für  $v = (a, b) \neq (0, 0)$  ist

$$\partial_v f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2ab^2}{a^2 + t^2b^4} = \begin{cases} 2b^2/a & \text{für } a \neq 0 \\ 0 & \text{für } a = 0. \end{cases}$$

Dennoch ist  $f$  im Nullpunkt unstetig, denn für  $c(t) = (t^2, t)$  gilt  $f(c(t)) = 1$  für alle  $t \neq 0$ .

## 18 Die Ableitung

Das Konzept der mehrdimensionalen Ableitung beruht auf dem Ansatz, dass eine differenzierbare Funktion mit einer affin-linearen Funktion lokal in erster Ordnung übereinstimmt, siehe Analysis I, Lemma 9.2. Zur Abgrenzung von den partiellen Ableitungen verwendet man auch den Begriff der totalen Ableitung. Wir betrachten hier Abbildungen zwischen  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$ , den Raum der linearen Abbildungen bezeichnen wir mit  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . Die Definition ist aber auch für beliebige normierte Räumen  $X, Y$  sinnvoll, nur muss dann  $L(X, Y)$  als Raum der stetigen linearen Abbildungen erklärt werden. Man spricht von Differenzierbarkeit im Sinne von Fréchet.

**Definition 18.1 (Ableitung)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen.  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt differenzierbar in  $x_0 \in \Omega$ , falls es ein  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  gibt, so dass gilt:

$$(18.1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + A(x - x_0))}{|x - x_0|} = 0.$$

Mit der Substitution  $h = x - x_0$  erhalten wir die äquivalente Fassung

$$(18.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - (f(x_0) + Ah)}{|h|} = 0.$$

Die Abbildung  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  ist durch (18.1) eindeutig bestimmt, siehe Satz 18.1, und heißt Ableitung von  $f$  in  $x_0$ . Notation:  $Df(x_0) = A$ .

Eine Basis kommt in der Definition nicht explizit vor. Zum Rechnen werden aber in aller Regel die Standardbasen benutzt. Eine lineare Abbildung  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  hat dann eine zugehörige Matrix  $a \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , und zwar gilt

$$Ax = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j e_i.$$

Umgekehrt entspricht jeder Matrix  $a \in \mathbb{R}^{m \times n}$  durch diese Formel eine lineare Abbildung  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . Oft wird zwischen linearer Abbildung und Matrix gar nicht unterschieden.

**Satz 18.1 (Berechnung und Eindeutigkeit der Ableitung)** Die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei in  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar. Dann hat  $f$  in  $x_0$  die Richtungsableitungen

$$(18.3) \quad \partial_v f(x_0) = Df(x_0)v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n,$$

und  $Df(x_0)$  hat bezüglich der Standardbasen die Matrixdarstellung (Jacobimatrix)

$$(18.4) \quad (\partial_j f_i(x_0)) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \dots & \dots & \partial_n f_1(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \dots & \dots & \partial_n f_m(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Insbesondere ist die Ableitung durch (18.1) eindeutig bestimmt.

BEWEIS: Für  $v = 0$  sind beide Seiten von (18.3) nach Definition gleich Null. Für  $v \neq 0$  berechnen wir mit  $A = Df(x_0)$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - Av \right| &= \frac{|f(x_0 + tv) - (f(x_0) + A(tv))|}{|t|} \\ &= \frac{|f(x_0 + tv) - (f(x_0) + A(tv))|}{|tv|} |v|. \end{aligned}$$

Für  $t \rightarrow 0$  geht die rechte Seite gegen Null nach (18.1), also folgt  $\partial_v f(x_0) = DF(x_0)v$ . Setzen wir  $v = e_j$  ein und berechnen die Ableitung komponentenweise, siehe Satz 17.1, so folgt weiter

$$Df(x_0)e_j = \partial_j f(x_0) = \sum_{i=1}^m \partial_j f_i(x_0)e_i.$$

□

Um die Differenzierbarkeit einer Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  im Punkt  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  zu zeigen, kann man in zwei Schritten vorgehen. Erstens berechnet man die Jacobimatrix, also die partiellen Ableitungen im Punkt  $x$ . Zweitens prüft man, ob die Entwicklung (18.1) gilt, wenn  $A$  die Jacobimatrix ist. Nach Satz 18.1 ist das die einzig mögliche Wahl.

**Beispiel 18.1** Die komplexe Funktion  $f(z) = z^2$  lautet in reellen Koordinaten

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(z) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \quad \text{wobei } z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben die Punkte im  $\mathbb{R}^2$  hier als Spaltenvektoren, zwecks Konsistenz mit der Notation der Jacobimatrix. Diese ist

$$A = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Damit berechnen wir für  $\zeta = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$  nach (18.1) den Approximationsfehler

$$\begin{aligned} f(z + \zeta) - (f(z) + A\zeta) &= \begin{pmatrix} (x + \xi)^2 - (y + \eta)^2 \\ 2(x + \xi)(y + \eta) \end{pmatrix} \\ &\quad - \left( \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \xi^2 - \eta^2 \\ 2\xi\eta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit  $|\zeta| = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$  ist die Norm rechts abgeschätzt durch  $C|\zeta|^2$ , also folgt

$$\frac{f(z + \zeta) - (f(z) + A\zeta)}{|\zeta|} \rightarrow 0 \quad \text{mit } \zeta \rightarrow 0.$$

**Beispiel 18.2 (Lineare Abbildungen)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . Dann ist

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, f(x) = Ax \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

in allen  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar mit Ableitung  $Df(x_0) = A$ . Dies folgt sofort wegen  $f(x_0 + h) = A(x_0 + h) = Ax_0 + Ah = f(x_0) + Ah$ .

**Beispiel 18.3 (Quadratische Formen)** Sei  $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrische Bilinearform. Wir betrachten die quadratische Form

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} b(x, x).$$

Um die Ableitung im Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  zu bestimmen, entwickeln wir

$$f(x+h) = \frac{1}{2} b(x+h, x+h) = \underbrace{f(x) + b(x, h)}_{\text{affinlinear in } h} + \underbrace{\frac{1}{2} b(h, h)}_{\text{quadratisch in } h}.$$

Es folgt  $Df(x)h = b(x, h)$ , denn der Restterm hat die Abschätzung

$$|b(h, h)| \leq \sum_{i,j=1}^n |b(e_i, e_j)| |h_i| |h_j| \leq C|h|^2 \quad \text{mit } C = \sum_{i,j=1}^n |b(e_i, e_j)|.$$

**Beispiel 18.4 (Funktionen einer Variablen)** Natürlich muss das Konzept auch in diesem Fall Sinn machen. Die Funktion  $f : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$  habe in  $x \in I$  die Ableitung  $f'(x) \in \mathbb{R}^m$  im Sinne von Analysis 1. Dann ist  $f$  differenzierbar in  $x$  im Sinne von Definition 18.1 mit

$$Df(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad Df(x)h = f'(x)h.$$

Denn es gilt für  $h \neq 0$ , siehe auch Lemma 9.2 in Analysis I,

$$\frac{|f(x+h) - (f(x) + f'(x)h)|}{|h|} = \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{mit } h \rightarrow 0.$$

Für reelle Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $Df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , also Element des Dualraums von  $\mathbb{R}^n$ . Es ist anschaulicher, den zugehörigen Vektor im  $\mathbb{R}^n$  zu betrachten.

**Definition 18.2 (Gradient)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x \in \Omega$ . Der Gradient von  $f$  im Punkt  $x$  ist der Vektor

$$\text{grad } f(x) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(x) e_j = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Formal gehen wir vom Zeilenvektor  $Df(x)$  zum Spaltenvektor  $\text{grad } f(x)$  mit denselben Einträgen über. Eine Charakterisierung ohne Koordinaten ist wie folgt: der Gradient ist der eindeutig bestimmte Vektor im  $\mathbb{R}^n$  mit der Eigenschaft

$$(18.5) \quad \langle \text{grad } f(x), v \rangle = Df(x)v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt. Ist  $\text{grad } f(x) = 0$ , so heißt  $x$  kritischer Punkt von  $f$ . Ist  $x$  nicht kritisch, so ist die Richtung von  $\text{grad } f(x)$  diejenige, in der  $f$  am stärksten ansteigt. Denn für  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $|v| = 1$  folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$(18.6) \quad \partial_v f(x) = \langle \text{grad } f(x), v \rangle \leq |\text{grad } f(x)|, \quad \text{Gleichheit genau wenn } v = \frac{\text{grad } f(x)}{|\text{grad } f(x)|}.$$

**Beispiel 18.5** Der Gradient der Funktion  $f(x) = \varphi(r)$  mit  $r(x) = |x|$  ist nach Beispiel 17.1

$$\text{grad } f(x) = \varphi'(r) \frac{x}{r} \quad \text{für } x \neq 0.$$

**Beispiel 18.6** Sei  $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrische Bilinearform und  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die zugehörige Matrix, also  $B_{ij} = b(e_i, e_j)$ . Es gilt dann, da  $B$  symmetrisch,

$$b(x, y) = \langle Bx, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Wir betrachten wieder die quadratische Form

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} b(x, x).$$

Nach Beispiel 18.3 gilt für alle  $v \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \text{grad } f(x), v \rangle = Df(x)v = b(x, v) = \langle Bx, v \rangle.$$

Also ist  $\text{grad } f(x) = Bx$ .

In Analysis I haben wir die Ableitung mit der Existenz der Tangente an den Graphen der Funktion motiviert. Im  $n$ -dimensionalen erwarten wir analog die Existenz einer  $n$ -dimensionalen Tangentialebene. Eine reellwertige Funktion  $f$  auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  kann immer als Höhenfunktion einer Landschaft über der Grundfläche  $\Omega$  interpretiert werden. Betrachte dazu den Graph der Funktion

$$G = \{(y, f(y)) : y \in \Omega\} \subset \Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Wir wollen zeigen, dass der Graph im Punkt  $p = (x, f(x))$  eine Tangentialebene hat, wenn  $f$  im Punkt  $x$  differenzierbar ist. Betrachte dazu für  $\lambda > 0$  die Mengen

$$G_{p,\lambda} = \frac{1}{\lambda}(G - p) = \left\{ \left( \frac{y-x}{\lambda}, \frac{f(y)-f(x)}{\lambda} \right) : y \in \Omega \right\}.$$

Der Graph  $G$  wird um  $-p$  verschoben, wobei  $p = (x, f(x))$  im Nullpunkt landet, dann wird mit dem Faktor  $\frac{1}{\lambda}$  gestreckt. Wir wollen die  $G_{p,\lambda}$  wieder als Graphen schreiben. Substituieren wir  $y = x + \lambda z$ , so folgt mit  $\Omega_{x,\lambda} = \{z : x + \lambda z \in \Omega\}$

$$G_{p,\lambda} = \{(z, f_{x,\lambda}(z)) : z \in \Omega_{x,\lambda}\} \quad \text{für} \quad f_{x,\lambda}(z) = \frac{f(x + \lambda z) - f(x)}{\lambda}.$$

Da  $\Omega$  offen, gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ . Es folgt  $B_R(0) \subset \Omega_{x,\lambda}$  für  $\lambda < \frac{\varepsilon}{R}$ . Für  $\lambda > 0$  hinreichend klein ist  $f_{x,\lambda}(z)$  also definiert, und es gilt

$$\lim_{\lambda \searrow 0} f_{x,\lambda}(z) = Df(x)z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}^n.$$

In diesem Sinn konvergieren die reskalierten Graphen  $G_{p,\lambda}$  gegen die Menge

$$T_p G = \{(z, Df(x)z) : z \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

$T_p G$  ist das Bild der linearen Abbildung  $z \mapsto (z, Df(x)z)$ , also linearer Unterraum von  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit Basis  $(e_1, \partial_1 f(x)), \dots, (e_n, \partial_n f(x))$ . Einheitsnormale von  $T_p G$  ist

$$\nu(p) = \frac{(-\text{grad } f(x), 1)}{\sqrt{1 + |\text{grad } f(x)|^2}} \quad \text{für } p = (x, f(x)).$$

Im Beweis der Differentiationsregeln brauchen wir eine Abschätzung für lineare Abbildungen  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  aus Analysis I, Beispiel 7.10. Und zwar hatten wir mit Cauchy-Schwarz

$$(18.7) \quad |Ax| = \left| \sum_{j=1}^n x_j A e_j \right| \leq \left( \sum_{j=1}^n |A e_j|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2} = |A| |x|.$$

Dabei bezeichnet  $|A| = \left( \sum_{j=1}^n |A e_j|^2 \right)^{1/2}$  die Euklidische Norm von  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . Es folgt, dass jede lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  Lipschitzstetig ist mit Konstante  $|A|$ , vgl. Analysis I, Beispiel 7.10:

$$|Ax - Ay| = |A(x - y)| \leq |A| |x - y|.$$

Die optimale, also kleinstmögliche Norm  $\|A\|$  mit einer Abschätzung (18.7) heißt Operatornorm. Für uns reicht die Euklidische Norm aus, die Optimalität spielt keine Rolle. Wird  $\mathbb{R}^n$  durch einen unendlichdimensionalen Raum ersetzt, so gilt (18.7) im allgemeinen nicht und lineare Abbildungen sind dann nicht automatisch stetig.

**Satz 18.2 (Differenzierbarkeit  $\Rightarrow$  Stetigkeit)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar in  $x_0$ , so ist  $f$  stetig in  $x_0$ .

BEWEIS: Wie soeben besprochen, sind affinere Funktionen stetig auf  $\mathbb{R}^n$ . Es reicht daher zu zeigen, dass die Funktion  $\varphi(x) = f(x) - (f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0))$  stetig in  $x_0$  ist. Aber  $\varphi(x_0) = 0$ , und nach Definition der Differenzierbarkeit gilt

$$\varphi(x) = |x - x_0| \frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} \rightarrow 0 \quad \text{mit } x \rightarrow x_0.$$

□

Wir müssen jetzt die Differentiationsregeln erarbeiten.

**Satz 18.3 (Kettenregel)** Seien  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$  mit  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $f(U) \subset V$ . Sind  $f$  in  $x_0$  und  $g$  in  $f(x_0)$  differenzierbar, so ist auch  $g \circ f$  in  $x_0$  differenzierbar und es gilt die Kettenregel

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) Df(x_0).$$

Für die zugehörigen Jacobimatrizen bedeutet das mit  $y_0 = f(x_0)$

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_k}(x_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y_0) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0) \quad \text{für } 1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq n.$$

BEWEIS: Sei  $y_0 = f(x_0)$ ,  $Df(x_0) = A$ ,  $Dg(y_0) = B$ . Wir definieren für hinreichend kleine  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  die Funktionen

$$\varepsilon_f(\xi) = \frac{f(x_0 + \xi) - (f(x_0) + A\xi)}{|\xi|} \quad \text{und} \quad \varepsilon_g(\eta) = \frac{g(y_0 + \eta) - (g(y_0) + B\eta)}{|\eta|}.$$

Mit  $\varepsilon_f(0) = 0$  und  $\varepsilon_g(0) = 0$  sind beide Funktionen nach Voraussetzung im Nullpunkt stetig. Offensichtliche Kandidatin für die Ableitung von  $g \circ f$  in  $x_0$  ist  $BA$ , also berechnen wir

$$\begin{aligned} & \frac{(g \circ f)(x_0 + \xi) - ((g \circ f)(x_0) + BA\xi)}{|\xi|} \\ = & \frac{g(y_0 + A\xi + |\xi|\varepsilon_f(\xi)) - (g(y_0) + BA\xi)}{|\xi|} \\ = & \frac{g(y_0) + B\eta + |\eta|\varepsilon_g(\eta) - (g(y_0) + BA\xi)}{|\xi|} \quad \text{wobei } \eta = A\xi + |\xi|\varepsilon_f(\xi) \\ = & B\varepsilon_f(\xi) + \frac{|\eta|}{|\xi|}\varepsilon_g(\eta). \end{aligned}$$

Wegen  $|B\varepsilon_f(\xi)| \leq |B||\varepsilon_f(\xi)|$  und  $|\eta| \leq (|A| + |\varepsilon_f(\xi)|)|\xi| \leq C|\xi|$  konvergiert die rechte Seite wie gewünscht gegen Null.  $\square$

**Beispiel 18.7** Spezialfall ist die Verkettung  $f \circ c$  einer Kurve  $c : (a, b) \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$  und einer Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Ist  $c$  differenzierbar in  $t \in (a, b)$  und  $f$  differenzierbar in  $c(t)$ , so folgt

$$\frac{d(f \circ c)}{dt}(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(c(t)) \frac{dc_j}{dt}(t),$$

beziehungsweise in vektorieller Form

$$(f \circ c)'(t) = Df(c(t))c'(t) = \langle \text{grad } f(c(t)), c'(t) \rangle.$$

Ist  $f \circ c$  konstant, so folgt  $\text{grad } f(c(t)) \perp c'(t)$ . Anschaulich: der Gradient von  $f$  steht senkrecht auf Kurven in der Niveaumenge  $\{x \in \Omega : f(x) = \text{const.}\}$ , also auf die ganze Niveaumenge. Im Fall  $n = 2$  kann man sich die Niveaumenge als Höhenlinie vorstellen.

Wie bei Funktionen einer Variablen kann die Ableitung vektorwertiger Funktionen auf die einzelnen Komponenten zurückgeführt werden.

**Satz 18.4 (komponentenweise Differentiation)**  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann in  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar, wenn alle Komponenten  $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , in  $x_0$  differenzierbar sind. Ist  $P_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  Projektion auf die  $i$ -te Koordinate, so gilt  $Df_i(x_0) = P_i Df(x_0)$ .

BEWEIS: Es gilt nach Definition

$$Df(x_0) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + A(x - x_0))}{|x - x_0|} = 0.$$

Die Konvergenz im  $\mathbb{R}^n$  ist gleichbedeutend mit der Konvergenz aller Komponenten. Durch Anwendung von  $P_i$  ergibt sich daher weiter die äquivalente Formulierung

$$(18.8) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_i(x) - (f_i(x_0) + P_i A(x - x_0))}{|x - x_0|} = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m.$$

Aus  $Df(x_0) = A$  folgt somit  $Df_i(x_0) = P_i A$ . Sei umgekehrt  $Df_i(x_0) = A_i$  für  $i = 1, \dots, m$ . Wir definieren  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  durch  $Av = \sum_{i=1}^m (A_i v) e_i$ . Dann ist  $P_i A = A_i$ , also gilt (18.8) und somit  $Df(x_0) = A$ .  $\square$

Wir zeigen schließlich die weiteren klassischen Ableitungsregeln.

**Satz 18.5 (Ableitungsregeln)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, und  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  seien differenzierbar im Punkt  $x \in \Omega$ . Dann gelten folgende Aussagen:

(a) Linearität: für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist  $\alpha f + \beta g$  in  $x$  differenzierbar mit Ableitung

$$D(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha Df(x) + \beta Dg(x).$$

(b) Produktregel:  $fg$  ist in  $x$  differenzierbar mit Ableitung

$$D(fg)(x) = Df(x)g(x) + f(x)Dg(x).$$

(c) Quotientenregel: ist  $g(x) \neq 0$ , so ist  $f/g$  auf einer Umgebung von  $x$  definiert und

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{Df(x)g(x) - f(x)Dg(x)}{g(x)^2}.$$

BEWEIS: Wir setzen  $Df(x) = A$ ,  $Dg(x) = B$ , und für  $h \neq 0$

$$\varepsilon_f(h) = \frac{f(x+h) - (f(x) + Ah)}{|h|}, \quad \varepsilon_g(h) = \frac{g(x+h) - (g(x) + Bh)}{|h|}.$$

Nach Voraussetzung gilt  $\varepsilon_f(h) \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_g(h) \rightarrow 0$  mit  $h \rightarrow 0$ . Mit der jeweils behaupteten Ableitung ist nun für  $h \rightarrow 0$  der Grenzwert in (18.2) nachzuprüfen. Für (a) gilt

$$\frac{(\alpha f + \beta g)(x+h) - ((\alpha f + \beta g)(x) + (\alpha A + \beta B)h)}{|h|} = \alpha \varepsilon_f(h) + \beta \varepsilon_g(h) \rightarrow 0.$$

Für (b) berechnen wir mit etwas mehr Mühe

$$\begin{aligned} & \frac{(fg)(x+h) - ((fg)(x) + (Ag(x) + f(x)B)h)}{|h|} \\ &= \frac{(f(x) + Ah + \varepsilon_f(h)|h|)(g(x) + Bh + \varepsilon_g(h)|h|) - (f(x)g(x) + g(x)Ah + f(x)Bh)}{|h|} \\ &= \frac{1}{|h|} (Ah)(Bh) + \varepsilon_f(h)(g(x) + Bh + \varepsilon_g(h)|h|) + \varepsilon_g(h)(f(x) + Ah). \end{aligned}$$

Wie in (18.7) bemerkt gilt  $|Ah| \leq |A||h|$  sowie  $|Bh| \leq |B||h|$ , also geht die rechte Seite mit  $h \rightarrow 0$  gegen Null. In (c) können wir  $m = 1$  und  $f \equiv 1$  annehmen, denn sonst schreiben wir  $f/g = f(1/g)$  und verwenden (b). Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|h|} \left( \frac{1}{g(x+h)} - \left( \frac{1}{g(x)} - \frac{Bh}{g(x)^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{|h|} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \left( g(x) - (g(x) + Bh + \varepsilon_g(h)|h|) + \frac{g(x+h)}{g(x)} Bh \right) \\ &= \frac{1}{g(x)g(x+h)} \left( \left( \frac{g(x+h)}{g(x)} - 1 \right) \frac{Bh}{|h|} - \varepsilon_g(h) \right). \end{aligned}$$

Wegen  $g(x) \neq 0$  und  $g(x+h) \rightarrow g(x)$  mit  $h \rightarrow 0$  nach Satz 18.2 geht die rechte Seite wieder gegen Null mit  $h \rightarrow 0$ .  $\square$

Die Quotientenregel kann auch eleganter mit der Kettenregel gezeigt werden: man verwendet  $1/g = h \circ g$  mit  $h(y) = \frac{1}{y}$ . Für die Produktregel gibt es ein ähnliches Argument: es ist  $fg = h \circ \phi$  mit  $\phi(x) = (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2$  und  $h(y_1, y_2) = y_1 y_2$ . Nach Satz 18.4 ist  $\phi$  differenzierbar, und  $h$  nach Beispiel 18.3.

Wie besprochen kann aus der Existenz der partiellen Ableitungen nicht auf die Differenzierbarkeit geschlossen werden, ja nicht einmal auf die Stetigkeit. Das ist schade, denn die partiellen Ableitungen sind so schön einfach auszurechnen, während die Definition 18.1 eventuell schwierig zu verifizieren ist. Zum Glück können wir aber doch die partiellen Ableitungen einsetzen.

**Satz 18.6 (stetig partiell differenzierbar  $\Rightarrow$  differenzierbar)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei in  $\Omega$  nach  $x_1, \dots, x_n$  partiell differenzierbar. Sind die Funktionen  $\partial_j f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $x \in \Omega$  stetig, so ist  $f$  in  $x$  differenzierbar.

BEWEIS: Wegen Satz 18.4 können wir  $m = 1$  annehmen. Mit Satz 18.1 kennen wir bereits die einzig mögliche Kandidatin für die Ableitung, nämlich

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad Ah = \sum_{k=1}^n \partial_k f(x) h_k.$$

Für  $h \in \mathbb{R}^n$  hinreichend klein ist  $f(x+h)$  mit  $f(x) + Ah$  zu vergleichen, dazu wollen wir den Mittelwertsatz verwenden. Da wir nur in Achsenrichtungen differenzieren können, laufen wir längs der Kanten des Quaders, das heißt wir betrachten die Punkte  $p_k = x + \sum_{i=1}^k h_i e_i$  mit  $k = 0, \dots, n$ . Es gilt für geeignete  $s_k \in [0, 1]$

$$f(p_k) - f(p_{k-1}) = f(p_{k-1} + h_k e_k) - f(p_{k-1}) = \partial_k f(p_{k-1} + s_k h_k e_k) h_k.$$

Es folgt nun

$$\begin{aligned} \frac{|f(x+h) - (f(x) + Ah)|}{|h|} &= \frac{1}{|h|} \left| \sum_{k=1}^n (f(p_k) - f(p_{k-1}) - \partial_k f(x) h_k) \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \sum_{k=1}^n \left( \partial_k f(p_{k-1} + s_k h_k e_k) - \partial_k f(x) \right) h_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left| \partial_k f \left( x + \sum_{i=1}^{k-1} h_i e_i + s_k h_k e_k \right) - \partial_k f(x) \right|. \end{aligned}$$

Die rechte Seite geht mit  $h \rightarrow 0$  gegen Null, da  $\partial_k f$  im Punkt  $x$  stetig ist.  $\square$

Es gibt differenzierbare Funktionen, die nicht stetig differenzierbar sind. In Analysis I, Serie 13, Aufgabe 4 hatten wir das Beispiel

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Aber hier gilt: Ausnahmen bestätigen die Regel, in den meisten Fällen ist Satz 18.6 das Mittel der Wahl, um die Differenzierbarkeit einer Funktion zu begründen. Dabei ist hilfreich, dass die Ableitungsregeln auch in der Klasse der  $C^k$ -Funktionen gelten.

**Folgerung 18.1** Sei  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ .

- (a) Mit  $f, g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$  gilt  $\alpha f + \beta g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$  für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- (b) Aus  $f, g \in C^k(\Omega)$  folgt  $fg \in C^k(\Omega)$ , sowie  $f/g \in C^k(\Omega)$  falls  $g \neq 0$  auf  $\Omega$ .
- (c) Sind  $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$ ,  $g \in C^k(V, \mathbb{R}^p)$  mit  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $f(U) \subset V$ , so ist  $g \circ f \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$ .

BEWEIS: Im Fall  $k = 0$  sind die Aussagen wohlbekannt. Die Behauptungen (a) und (b) folgen nun aus den Rechenregeln für die partielle Ableitung, siehe Satz 17.1, mit Induktion über  $k$ . Sind zum Beispiel  $f, g \in C^k(\Omega)$  für ein  $k \geq 1$ , so gilt induktiv  $\partial_j(fg) = (\partial_j f)g + f(\partial_j g) \in C^{k-1}(\Omega)$ , also  $fg \in C^k(\Omega)$ .

Für  $k \geq 1$  sind die Abbildungen  $f$  und  $g$  aus (c) differenzierbar nach Satz 18.6. Dann ist  $g \circ f$  ebenfalls differenzierbar wegen der Kettenregel, Satz 18.3, mit partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial(g \circ f)_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \circ f \frac{\partial f_j}{\partial x_k}.$$

Nun sind  $\partial_k f_j \in C^{k-1}(U)$ ,  $\partial_j g_i \in C^{k-1}(V)$  nach Voraussetzung, also  $\partial_j g_i \circ f \in C^{k-1}(U)$  nach Induktion. Es folgt  $\partial_k(g \circ f)_i \in C^{k-1}(U)$  mit der Produktregel aus (b), also ist  $g \circ f$  von der Klasse  $C^k$ . □



## 19 Schrankensatz

Ein Grundproblem in der Analysis ist es, Informationen über die Ableitung in Eigenschaften der Funktion zu übersetzen. Für Funktionen einer Variablen, also  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , stehen dazu zwei Argumente zur Verfügung:

a) der Mittelwertsatz (Analysis I, Kapitel 10):

$$f(b) - f(a) = f'(\tau)(b - a) \quad \text{für ein } \tau \in (a, b);$$

b) der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Analysis I, Kapitel 15):

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

Der Mittelwertsatz hat den Nachteil, dass er keine Kontrolle der Zwischenstelle liefert, zum Beispiel bei Abhängigkeit von weiteren Parametern. Auch gilt er so nicht für vektorwertige Funktionen, wie das Beispiel  $f(t) = (\cos t, \sin t)$  auf  $[0, 2\pi]$  zeigt. Deshalb verwenden wir im Folgenden meistens den Hauptsatz, allerdings muss  $f(t)$  dazu eine  $C^1$ -Funktion sein. Genauer reicht es wenn  $f(t)$  stetig auf  $[a, b]$  und stückweise  $C^1$  ist. Denn sei  $a = t_0 < \dots < t_N = b$  eine Unterteilung, so dass  $f'$  auf den offenen Teilintervallen stetig ist und einseitige Grenzwerte hat, nicht notwendig gleich. Dann gilt

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^N (f(t_k) - f(t_{k-1})) = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} f'(t) dt = \int_a^b f'(t) dt.$$

Wie kann dieses eindimensionale Argument nun für Funktionen mehrerer Variabler  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eingesetzt werden? Die einfache Antwort: indem  $f$  längs Kurven  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ ,  $\gamma = \gamma(t)$ , ausgewertet wird.

**Lemma 19.1** Sei  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \Omega$  stetig und stückweise  $C^1$ . Dann gilt für  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$

$$(19.1) \quad f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b Df(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

BEWEIS: Nach Folgerung 18.1 ist die Funktion  $f \circ \gamma$  stückweise  $C^1$ , und mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel gilt

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = \int_a^b Df(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

□

Im Beweis trat das Integral einer vektorwertigen Funktion auf. Dieses kann komponentenweise erklärt werden, das heißt für  $v \in C^0([a, b], \mathbb{R}^m)$  ist

$$\int_a^b v(t) dt = \int_a^b \left( \sum_{i=1}^m v_i(t)e_i \right) dt = \sum_{i=1}^m \left( \int_a^b v_i(t) dt \right) e_i.$$

Alternativ kann man prüfen, dass die Definition des Integrals in Analysis I, Kapitel 14, mittels Riemannscher Summen ohne Änderung auch für Funktionen mit Werten im  $\mathbb{R}^m$  funktioniert. Man kann sich so oder so davon überzeugen, dass der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ganz analog für vektorwertige Funktionen gilt.

**Satz 19.1 (Konstanzsatz)** Für  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\Omega$  offen und zusammenhängend, gilt:

$$Df(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist konstant.}$$

BEWEIS: Für  $y \in B_\rho(x) \subset \Omega$  wende Lemma 19.1 an mit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ ,  $\gamma(t) = x + t(y - x)$ . Es folgt  $f(y) = f(x)$ , das heißt  $f$  ist lokal konstant. Nach Lemma 16.2 ist  $f$  konstant.  $\square$

Der Begriff des Zusammenhangs kann auch mit Wegen definiert werden, das wollen wir der Vollständigkeit halber kurz schildern.

**Definition 19.1 (wegweise zusammenhängend)** Ein metrischer Raum  $X$  ist wegweise zusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten  $x_0, x_1 \in X$  eine stetige Abbildung  $c : [0, 1] \rightarrow X$  gibt mit  $c(0) = x_0$ ,  $c(1) = x_1$ .

Ein nur stetiger Weg kann unanschaulich kompliziert sein, zum Beispiel kann er die Fläche eines Quadrats überdecken (Peano 1890). Der Beweis des folgenden Satzes zeigt, dass im Fall von Gebieten im  $\mathbb{R}^n$  stückweise  $C^1$  Verbindungen wählbar sind.

**Satz 19.2 (Zusammenhangskriterien)** Für die Zusammenhangsbegriffe gilt:

- (1)  $X$  metrischer Raum: wegweise zusammenhängend  $\Rightarrow$  zusammenhängend.
- (2)  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offene Menge: zusammenhängend  $\Rightarrow$  wegweise zusammenhängend.

BEWEIS: Für (1) sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  lokal konstant, und  $x_0 \in X$  fest. Zu  $x \in X$  wähle einen Weg  $c : [0, 1] \rightarrow X$  von  $c(0) = x_0$  nach  $c(1) = x$ . Dann ist  $f \circ c$  lokal konstant auf  $[0, 1]$ , also konstant nach Satz 16.9. Also ist  $f(x) = f(c(1)) = f(c(0)) = f(x_0)$ , also ist  $f$  konstant.

Um (2) zu zeigen, betrachten wir für  $x_0 \in \Omega$  fest die Teilmenge

$$E = \{x \in \Omega : \exists c_x : [0, 1] \rightarrow \Omega \text{ stückweise } C^1 \text{ mit } c_x(0) = x_0, c_x(1) = x\}.$$

Es gilt  $E \neq \emptyset$  wegen  $x_0 \in E$ . Zu  $x \in E$  gibt es  $\rho > 0$  mit  $B_\rho(x) \subset \Omega$ . Für  $y \in B_\rho(x)$  setze

$$c_y(t) = \begin{cases} c_x(2t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ (2 - 2t)x + (2t - 1)y & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Dies zeigt  $B_\rho(x) \subset E$ , also ist  $E$  offen. Sei jetzt  $x_k \in E$  mit  $x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in \Omega$ . Für  $k$  groß ist dann  $x_k \in B_\rho(x)$ , und wir erhalten den Weg

$$c_x(t) = \begin{cases} c_{x_k}(2t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ (2 - 2t)x_k + (2t - 1)x & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Also ist  $E$  auch abgeschlossen, und nach Voraussetzung folgt  $E = \Omega$ . Jeder Punkt in  $\Omega$  lässt sich mit  $x_0$  durch einen Weg verbinden, der sogar stückweise  $C^1$  ist.  $\square$

**Beispiel 19.1** Betrachte die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Setze  $X = \{(x, f(x)) : x \in [0, \infty)\}$ . Dann ist  $X$  metrischer Raum, versehen mit der Euklidischen Abstand im  $\mathbb{R}^2$ . Überlegen Sie:  $X$  ist zusammenhängend, aber der Punkt  $(0, 0)$  kann nicht durch einen stetigen Weg in  $X$  mit den anderen Punkten verbunden werden.

Wir wollen nicht nur die Konstanz von Funktionen zeigen, sondern ähnlich wie im Eindimensionalen auch Wachstumsabschätzungen. Mit der bloßen Existenz von Verbindungswegen lässt sich dann nichts anfangen, eine quantitative Kontrolle ist notwendig. Der häufigste und einfachste Fall ist, wenn wir die gerade Strecke nehmen können.

**Definition 19.2** Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt *konvex*, falls folgende Implikation gilt:

$$x_0, x_1 \in M \quad \Rightarrow \quad (1-t)x_0 + tx_1 \in M \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

**Satz 19.3 (Schrankensatz)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und konvex, und  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ . Es gebe ein  $L < \infty$  mit  $|Df(x)| \leq L$  für alle  $x \in \Omega$ . Dann folgt

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq L|x_1 - x_0| \quad \text{für alle } x_0, x_1 \in \Omega.$$

BEWEIS: Für jede stetige Funktion  $\varphi : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  gilt die Ungleichung

$$(19.2) \quad \left| \int_a^b \varphi \right| \leq \int_a^b |\varphi|.$$

Dies folgt durch Anwendung der Dreiecksungleichung auf die Riemannschen Summen. Sei nun  $\gamma(t) = (1-t)x_0 + tx_1$  für  $0 \leq t \leq 1$ . Aus (19.1) und (18.7) folgt, da  $\gamma'(t) = x_1 - x_0$ ,

$$|f(x_1) - f(x_0)| = \left| \int_0^1 Df(\gamma(t))(x_1 - x_0) dt \right| \leq \int_0^1 |Df(\gamma(t))(x_1 - x_0)| dt \leq L|x_1 - x_0|.$$

□

Die folgende lokale Variante des Schrankensatzes ist ebenfalls oft nützlich.

**Folgerung 19.1** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ . Dann gibt es zu jeder kompakten Menge  $K \subset \Omega$  eine Konstante  $L < \infty$  mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in K.$$

BEWEIS: Angenommen nicht, dann gibt es zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  Punkte  $x_k, y_k \in K$  mit

$$|f(x_k) - f(y_k)| > k|x_k - y_k| \quad \text{für } k = 1, 2, \dots$$

Da  $f$  stetig auf der kompakten Menge  $K$  ist, gibt es ein  $M < \infty$  mit  $|f(x)| \leq M$  für alle  $x \in K$  nach Satz 16.7. Weiter können wir nach Wahl einer Teilfolge und Umnummerierung annehmen, dass  $x_k \rightarrow x \in K$  mit  $k \rightarrow \infty$ . Aber

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k} |f(x_k) - f(y_k)| \leq \frac{2M}{k} \rightarrow 0 \quad \text{mit } k \rightarrow \infty,$$

also folgt  $y_k \rightarrow x$  mit  $k \rightarrow \infty$ . Wähle nun ein  $r > 0$  mit  $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ . Da  $Df$  stetig ist, gibt es wieder nach Satz 16.7 ein  $L < \infty$  mit

$$|Df(y)| \leq L \quad \text{für alle } y \in \overline{B_r(x)}.$$

Für hinreichend große  $k$  gilt  $x_k, y_k \in B_r(x)$ , also liefert Satz 19.3

$$k|x_k - y_k| < |f(x_k) - f(y_k)| \leq L|x_k - y_k|,$$

ein Widerspruch für  $k$  hinreichend groß. □



## 20 Extremwerte und konvexe Funktionen

In diesem Abschnitt diskutieren wir lokale Extrema von Funktionen mehrerer Variabler, und verallgemeinern die notwendigen und hinreichenden Kriterien aus Analysis 1. Dabei spielt die zweite Ableitung eine entscheidende Rolle. Wir behandeln im Anschluss Grundtatsachen über konvexe Funktionen. Als bekannt setzen wir voraus: auf einer kompakten Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  nimmt eine stetige Funktion ihre Extremwerte an.

**Definition 20.1** Die Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$ , hat in  $x \in M$  ein lokales Minimum, falls es ein  $\delta > 0$  gibt mit

$$f(y) \geq f(x) \quad \text{für alle } y \in B_\delta(x) \cap M.$$

Ist sogar  $f(y) > f(x)$  für  $y \in B_\delta(x) \setminus \{x\}$ , so heißt das Minimum isoliert. Ein (isoliertes) lokales Maximum ist entsprechend definiert.

**Satz 20.1 (notwendige Bedingung für Extrema)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  habe in  $x \in \Omega$  ein lokales Extremum. Ist  $f$  differenzierbar in  $x$ , so folgt  $Df(x) = 0$ .

BEWEIS: Für  $v \in \mathbb{R}^n$  hat die Funktion  $t \mapsto f(x + tv)$  ein lokales Extremum bei  $t = 0$ , also folgt aus der eindimensionalen Version und Satz 18.1

$$0 = \frac{d}{dt} f(x + tv)|_{t=0} = Df(x)v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

□

**Definition 20.2** Ein Punkt  $x \in \Omega$  mit  $Df(x) = 0$  heißt kritischer Punkt von  $f$ .

Kritische Punkte sind also Kandidaten für Extremalstellen. Es gibt aber auch andere kritische Punkte, das zeigt schon das eindimensionale Beispiel  $f(x) = x^3$  im Punkt  $x = 0$ . Um die Situation genauer zu analysieren brauchen wir die zweite Ableitung.

**Definition 20.3** Sei  $f \in C^2(\Omega)$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Die zweite Ableitung von  $f$  im Punkt  $x \in \Omega$  ist die Bilinearform

$$D^2 f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad D^2 f(x)(v, w) = \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij}^2 f(x) v_i w_j.$$

Die Matrix  $(\partial_{ij}^2 f(x)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt Hessematrix von  $f$  an der Stelle  $x$ , und als Hesseform bezeichnet man die zugehörige quadratische Form

$$v \mapsto D^2 f(x)(v, v) = \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij}^2 f(x) v_i v_j.$$

Die Hessematrix ist symmetrisch, und  $D^2 f(x)$  ist symmetrische Bilinearform. Denn nach Satz 17.2 gilt  $\partial_{ij}^2 f = \partial_{ji}^2 f$  für  $f \in C^2(\Omega)$ , und daraus folgt

$$D^2 f(x)(v, w) = \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij}^2 f(x) v_i w_j = \sum_{i,j=1}^n \partial_{ji}^2 f(x) w_j v_i = D^2 f(x)(w, v).$$

Als erstes wollen wir die Formel für die zweite Ableitung längs Kurven herleiten.

**Lemma 20.1** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^2(\Omega)$  und  $\gamma \in C^2(I, \Omega)$ . Dann gilt

$$(20.1) \quad (f \circ \gamma)''(t) = D^2 f(\gamma(t))(\gamma'(t), \gamma'(t)) + Df(\gamma(t))\gamma''(t).$$

BEWEIS: Nach Kettenregel ist  $(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(\gamma(t))\gamma'_j(t)$ , und weiter

$$(f \circ \gamma)''(t) = \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij}^2 f(\gamma(t))\gamma'_i(t)\gamma'_j(t) + \sum_{j=1}^n \partial_j f(\gamma(t))\gamma''_j(t).$$

□

Wir benötigen nun eine lokale Entwicklung, die die zweite Ableitung mit einbezieht.

**Lemma 20.2** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^2(\Omega)$ . Dann gilt

$$\frac{f(x+h) - (f(x) + Df(x)h + \frac{1}{2}D^2f(x)(h,h))}{|h|^2} \rightarrow 0 \quad \text{mit } h \rightarrow 0.$$

BEWEIS: Setze  $\gamma(t) = x + th$ , das heißt nach Lemma 20.1 gilt

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df(x+th)h \quad \text{und} \quad (f \circ \gamma)''(t) = D^2f(x+th)(h,h).$$

Wir berechnen mit dem Hauptsatz und partieller Integration

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)(1) &= (f \circ \gamma)(0) + \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t) dt \\ &= (f \circ \gamma)(0) + (f \circ \gamma)'(0) + \int_0^1 (1-t)(f \circ \gamma)''(t) dt. \end{aligned}$$

Einsetzen von  $\gamma(t) = x + th$  liefert

$$(20.2) \quad f(x+h) = f(x) + Df(x)h + \frac{1}{2}D^2f(x)(h,h) + \int_0^1 (1-t)(D^2f(x+th) - D^2f(x))(h,h) dt.$$

Wir schätzen den Integranden ab. Nach Cauchy-Schwarz gilt für  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\left| \sum_{i,j=1}^n Q_{ij}h_i h_j \right| = \left| \sum_{i=1}^n (Qh)_i h_i \right| = |\langle Qh, h \rangle| \leq |Qh| |h| \leq |Q| |h|^2.$$

Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $|D^2f(y) - D^2f(x)| < \varepsilon$  für  $|y - x| < \delta$ . Es folgt

$$|(D^2f(x+th) - D^2f(x))(h,h)| \leq \varepsilon |h|^2 \quad \text{für } |h| < \delta.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Als zweites Hilfsmittel brauchen wir folgende Tatsache über quadratische Formen.

**Lemma 20.3** Sei  $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform, und

$$\lambda = \inf\{b(x,x) : x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}.$$

Dann gibt es ein  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $|v| = 1$  und  $b(v,v) = \lambda$ .

BEWEIS: Die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = b(x, x)$ , ist stetig auf  $\mathbb{R}^n$ , denn es gilt

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_i x_j \quad \text{wobei } b_{ij} = b(e_i, e_j).$$

Da  $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$  kompakt ist, existiert ein Minimierer  $v$  nach Satz 16.7.  $\square$

Das Lemma gilt allgemeiner auf jedem Euklidischen Vektorraum  $V$  mit  $n := \dim V < \infty$ , und zwar wird dies auf den Fall  $\mathbb{R}^n$  reduziert durch Wahl einer Orthonormalbasis  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ , also  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ . Eine Orthonormalbasis lässt sich aus einer beliebigen Basis mit dem Verfahren von Gram-Schmidt explizit konstruieren (Übungsaufgabe). Für gegebenes  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  haben wir dann die induzierte Bilinearform

$$b_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad b_{\mathcal{B}}(x, y) = b(x_{\mathcal{B}}, y_{\mathcal{B}}) \quad \text{wobei } x_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^n x_i v_i.$$

Nach Wahl von  $\mathcal{B}$  gilt  $\|x_{\mathcal{B}}\| = |x|$ . Durch Substitution  $v = x_{\mathcal{B}}$  folgt

$$\inf\{b(v, v) : \|v\| = 1\} = \inf\{b_{\mathcal{B}}(x, x) : |x| = 1\}.$$

Das Infimum wird rechts in einem Punkt  $x$  angenommen, also links im Punkt  $v = x_{\mathcal{B}}$ .

**Definition 20.4** Eine symmetrische Bilinearform  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *positiv definit* (bzw. *positiv semidefinit*), falls gilt:

$$b(v, v) > 0 \quad (\text{bzw. } b(v, v) \geq 0) \quad \text{für alle } v \in V \setminus \{0\}.$$

*Notation:*  $b > 0$  bzw.  $b \geq 0$ . Entsprechend für negativ (semi-)definit.

Beachten Sie, dass *definit* die strikte Ungleichung bedeutet, anders als zum Beispiel bei der Monotonie von Funktionen, wo wir zum Ausschluss der Gleichheit den Begriff *streng monoton* verwenden. Wir bemerken auch, dass es sich nur um eine teilweise Ordnung handelt, es muss nicht einer der Fälle  $b \geq 0$  oder  $b \leq 0$  gelten. Für  $b(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$  auf  $\mathbb{R}^2$  gilt zum Beispiel  $b(e_1, e_1) > 0$ , aber  $b(e_2, e_2) < 0$ .

**Satz 20.2 (Lokale Extrema)** Sei  $f \in C^2(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $x \in \Omega$ .

- (a) Wenn  $f$  in  $x$  ein lokales Minimum hat, so ist  $D^2 f(x)$  positiv semidefinit.
- (b) Ist  $Df(x) = 0$  und  $D^2 f(x)$  positiv definit, so hat  $f$  in  $x$  ein isoliertes lokales Minimum.

BEWEIS: In (a) gilt  $Df(x) = 0$  nach Satz 20.1. Für  $v \in \mathbb{R}^n$  beliebig hat  $t \mapsto f(x + tv)$  bei  $t = 0$  ein lokales Minimum, also folgt aus dem eindimensionalen Fall und (20.1)

$$0 \leq \frac{d^2}{dt^2} f(x + tv)|_{t=0} = D^2 f(x)(v, v).$$

Für (b) verwende (20.2): zu  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$f(x + h) - f(x) = \frac{1}{2} D^2 f(x)(h, h) + R(h) \quad \text{mit } |R(h)| < \varepsilon |h|^2 \text{ für } |h| < \delta.$$

Nach Voraussetzung ist  $D^2f(x)(h, h) > 0$  für  $h \neq 0$ , wir brauchen aber hier eine quantitative Version. Nach Lemma 20.3 gibt es ein  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $|v| = 1$ , mit

$$\lambda := \inf_{|w|=1} D^2f(x)(w, w) = D^2f(x)(v, v) > 0.$$

Wir wählen  $\varepsilon < \frac{\lambda}{2}$ . Mit dem zugehörigen  $\delta > 0$  gilt

$$f(x+h) - f(x) \geq \frac{\lambda}{2}|h|^2 - \varepsilon|h|^2 = \left(\frac{\lambda}{2} - \varepsilon\right)|h|^2 > 0 \text{ für } 0 < |h| < \delta.$$

□

Um die Funktion in der Nähe eines kritischen Punkts zu verstehen, ist der folgende Satz aus der Linearen Algebra nützlich.

**Satz 20.3 (Hauptachsentransformation)** Sei  $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrische Bilinearform. Dann gibt es eine Orthonormalbasis  $v_1, \dots, v_n$  und  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ , so dass gilt:

$$b(v_i, v_j) = \lambda_i \delta_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

BEWEIS: Setze  $\lambda = \inf\{b(x, x) : |x| = 1\}$  und wähle  $v \in V$  mit  $|v| = 1$  und  $b(v, v) = \lambda$ , siehe Lemma 20.3. Wir behaupten

$$(20.3) \quad b(v, w) = \lambda \langle v, w \rangle \quad \text{für alle } w \in \mathbb{R}^n.$$

Die Gleichung stimmt für  $w = v$ , und die Menge der  $w \in \mathbb{R}^n$  mit (20.3) ist ein Unterraum. Es reicht daher, die Gleichung für  $w \in \mathbb{R}^n$  mit  $\langle v, w \rangle = 0$  und  $|w| = 1$  zu zeigen. Dann ist  $|(\cos t)v + (\sin t)w|^2 = 1$  für  $t \in \mathbb{R}$ , und aus der Minimumeigenschaft folgt wie behauptet

$$b(v, w) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} b((\cos t)v + (\sin t)w, (\cos t)v + (\sin t)w)|_{t=0} = 0 = \lambda \langle v, w \rangle.$$

Jetzt konstruiere induktiv  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  und orthonormale  $v_1, \dots, v_n$  mit

$$b(v_i, w) = \lambda_i \langle v_i, w \rangle \quad \text{für alle } w \in V.$$

Mit  $w = v_j$  ist das die Behauptung des Satzes. Für  $k = 1$  nehmen wir  $\lambda_1 = \lambda$  und  $v_1 = v$  wie oben. Seien nun  $v_1, \dots, v_k$  und  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$  schon bestimmt für  $1 \leq k \leq n - 1$ . Setze

$$\lambda_{k+1} = \inf\{b(x, x) : x \in V_k, |x| = 1\} \quad \text{mit } V_k = \{v_1, \dots, v_k\}^\perp.$$

Es gilt  $V_{k+1} \subset V_k$  und damit  $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k$ . Nach Lemma 20.3, angewandt im Raum  $V_k$  statt  $\mathbb{R}^n$ , gibt es ein  $v_{k+1} \in V_k$  mit  $|v_{k+1}| = 1$  und  $b(v_{k+1}, v_{k+1}) = \lambda_{k+1}$ . Aus (20.3) folgt

$$b(v_{k+1}, w) = \lambda_{k+1} \langle v_{k+1}, w \rangle \quad \text{für alle } w \in V_k.$$

Aber da  $b$  symmetrisch, gilt induktiv für  $1 \leq i \leq k$

$$b(v_{k+1}, v_i) = b(v_i, v_{k+1}) = \lambda_i \langle v_i, v_{k+1} \rangle = 0 = \lambda_{k+1} \langle v_{k+1}, v_i \rangle.$$

Es folgt  $b(v_{k+1}, w) = \lambda_{k+1} \langle v_{k+1}, w \rangle$  für alle  $w \in V$ , der Induktionsschluss. □

Jede lineare Abbildung  $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  induziert die Bilinearform

$$b(v, w) = \langle Bv, w \rangle \quad \text{für } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

$B$  heißt symmetrisch, wenn  $b$  symmetrisch ist. Wegen  $b(v, w) - \lambda \langle v, w \rangle = \langle Bv - \lambda v, w \rangle$  ist Gleichung (20.3) gleichbedeutend mit

$$Bv = \lambda v,$$

das heißt  $v$  ist Eigenvektor von  $B$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Satz 20.3 besagt: symmetrische Endomorphismen des  $\mathbb{R}^n$  sind diagonalisierbar, genauer gibt es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Diese Konzepte haben eine unendlichdimensionale Verallgemeinerung, den Spektralsatz, der zum Beispiel in der Quantenmechanik von Bedeutung ist. Der Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert heißt dort Grundzustand, die weiteren Eigenvektoren sind die angeregten Zustände. Ein anderes Beispiel sind Schwingungen mit Grund- und Obertönen.

In den Koordinaten  $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$  bezüglich der Eigenvektorbasis von  $b$  hat die quadratische Form die Darstellung

$$b(x, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \quad \text{mit } \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Für  $n = 2$  wollen wir die Mengen  $M_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : b(x, x) = c\}$  beschreiben; dabei können wir nach Übergang zu  $-b$  annehmen, dass  $\lambda_2 > 0$  ist. Es ergeben sich drei Fälle:

$\lambda_1 > 0$ : Im Nullpunkt hat  $b(x, x)$  ein globales, isoliertes Minimum und für  $c > 0$  ist  $M_c$  eine achsensymmetrische Ellipse mit Scheiteln in  $(\pm \sqrt{c/\lambda_1}, 0)$  und  $(0, \pm \sqrt{c/\lambda_2})$ .

$\lambda_1 = 0$ : Auch hier ist im Nullpunkt ein globales Minimum, allerdings ist  $M_0$  die gesamte  $x_1$ -Achse; für  $c > 0$  besteht  $M_c$  aus den parallelen Geraden  $x_2 = \pm \sqrt{c/\lambda_2}$ .

$\lambda_1 < 0$ :  $M_0$  ist Vereinigung der beiden Ursprungsgeraden  $x_2 = \pm \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2} x_1$ . Für  $c > 0$  ist  $M_c$  eine nach oben und unten geöffnete Hyperbel mit Scheiteln  $(0, \pm \sqrt{c/\lambda_2})$  und  $M_0$  als Asymptotenlinien. Für  $c < 0$  erhalten wir ebenfalls eine Hyperbel mit Asymptoten  $M_0$ , die aber nach links und rechts geöffnet ist und die Scheitel  $(\pm \sqrt{c/\lambda_1}, 0)$  hat.

Betrachten wir in den drei Fällen die zugehörigen Graphen im  $\mathbb{R}^3$ , so haben wir für  $\lambda_1 > 0$  anschaulich eine Mulde, für  $\lambda_1 = 0$  einen Hohlweg und für  $\lambda_1 < 0$  einen Sattel. Aus der Mulde wird für  $-b$  eine Kuppe. Ein kritischer Punkt  $x$  einer Funktion  $f$  heißt nicht degeneriert, wenn die Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $D^2 f(x)$  alle ungleich Null sind. In diesem Fall bezeichnet man die Anzahl der negativen Eigenwerte als den Index des kritischen Punkts. Für  $f(x) = b(x, x)$  sind die drei Fälle oben der Reihe nach Index Null, degeneriert und Index Eins, die Kuppe ist Index zwei.

**Definition 20.5 (konvexe Funktion)** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  konvex. Dann heißt  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  konvex, falls für alle  $x, y \in K$  gilt:

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

$f$  heißt strikt konvex, falls die strikte Ungleichung gilt für  $x \neq y$  und  $t \in (0, 1)$ .

Wie man leicht sieht, ist Konvexität von  $f$  äquivalent dazu, dass der Epigraph

$$G^+(f) = \{(x, z) \in K \times \mathbb{R} : z \geq f(x)\}$$

eine konvexe Menge im  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  ist.

**Satz 20.4 (Konvexitätskriterien)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und konvex, und  $f \in C^1(\Omega)$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a)  $f$  ist konvex.
- (b)  $f(y) \geq f(x) + Df(x)(y - x)$  für alle  $x, y \in \Omega$ .
- (c)  $(Df(y) - Df(x))(y - x) \geq 0$  für alle  $x, y \in \Omega$ .

Ist sogar  $f \in C^2(\Omega)$ , so ist außerdem äquivalent:

- (d)  $D^2f(x) \geq 0$  für alle  $x \in \Omega$ .

BEWEIS: Die Aussage wird jeweils auf den eindimensionalen Fall reduziert, indem wir für  $x, y \in \Omega$  die Funktion  $\varphi(t) = (1 - t)f(x) + tf(y) - f((1 - t)x + ty)$  betrachten. Unter Voraussetzung (a) hat  $\varphi$  in  $t = 0$  ein Minimum, daraus folgt (b):

$$0 \leq \varphi'(0) = f(y) - f(x) - Df(x)(y - x).$$

Aussage (c) folgt aus (b) durch Vertauschen von  $x$  und  $y$  und Addition. Die Implikation (c)  $\Rightarrow$  (a) zeigen wir durch Widerspruch. Angenommen  $\varphi(t)$  hat in  $\tau \in (0, 1)$  ein Minimum  $\varphi(\tau) < 0$ . Für  $t_1 < t_2$  gilt nach (c) mit  $x(t) = (1 - t)x + ty$

$$\varphi'(t_1) - \varphi'(t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} (Df(x(t_2)) - Df(x(t_1)))(x(t_2) - x(t_1)) \geq 0.$$

Für  $t < \tau$  folgt  $\varphi'(t) \geq \varphi'(\tau) = 0$ , und hieraus  $\varphi(0) \leq \varphi(\tau) < 0$ , ein Widerspruch.

Sei nun  $f \in C^2(\Omega)$ . Nach (20.2) wissen wir

$$f(x + h) = f(x) + Df(x)h + \int_0^1 (1 - t)D^2f(x + th)(h, h) dt.$$

Mit  $h = y - x$  folgt die die Implikation (d)  $\Rightarrow$  (b). Umgekehrt folgt (d) aus (b) mit Satz 20.2, denn die Funktion  $g(y) = f(y) - (f(x) + Df(x)(y - x))$  hat in  $x$  ein Minimum.  $\square$

Eine Funktion  $f$  mit  $f((1 - t)x + ty) \geq (1 - t)f(x) + tf(y)$  für alle  $x, y \in \Omega$ ,  $t \in [0, 1]$ , heißt konkav und es gelten entsprechende Aussagen mit umgekehrten Ungleichungen.

## 21 Taylorentwicklung

Wir wollen nun die Taylorentwicklung von Funktionen zunächst einer und dann mehrerer Variabler herleiten. Die Idee der Taylorentwicklung ist es, eine gegebene Funktion  $f$  mit einem Polynom zu vergleichen, das mit  $f$  an einer festen Stelle  $x_0$  „von höherer Ordnung“ übereinstimmt, das heißt einschließlich einer Reihe von Ableitungen. Dieses Polynom sollte dann auch nahe bei  $x_0$  die Funktion gut approximieren, und das will quantifiziert werden. Für lineare sowie quadratische Polynome haben wir das in den vorigen Abschnitten schon behandelt.

Zur Erinnerung: eine Funktion  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Polynom vom Grad  $k \in \mathbb{N}_0$ , wenn es  $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  gibt mit  $a_k \neq 0$ , so dass gilt:

$$P(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Im Raum aller Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Menge  $\mathbb{P}_k$  der Polynome vom Grad  $\leq k$  der durch  $1, x, \dots, x^k$  erzeugte Unterraum. Es gilt: für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}$  bilden die Funktionen  $1, x - x_0, \dots, (x - x_0)^k$  eine Basis von  $\mathbb{P}_k$ . Wegen  $\dim \mathbb{P}_k \leq k + 1$  müssen wir nur die lineare Unabhängigkeit zeigen. Dazu verwenden wir die Ableitungsregel

$$(21.1) \quad P(x) = \sum_{j=0}^k a_j (x - x_0)^j \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^i P(x)|_{x=x_0} = i! a_i.$$

Ist  $P(x)$  die Nullfunktion, so folgt  $a_i = 0$  für  $i = 0, \dots, k$  wie behauptet.

**Lemma 21.1** Sei  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Zu  $f \in C^k(I)$  gibt es genau ein Polynom  $P \in \mathbb{P}_k$  mit  $P^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$  für  $i = 0, 1, \dots, k$ , und zwar

$$(21.2) \quad P_k(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

$P_k$  heißt Taylorpolynom der Ordnung  $k$  von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0$ .

BEWEIS: Für das in (21.2) definierte Polynom gilt  $P^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$  für  $i = 0, \dots, k$ , wie man mit (21.1) sieht. Zur Eindeutigkeit sei  $P \in \mathbb{P}_k$  mit  $P^{(i)}(x_0) = 0$  für alle  $i = 0, \dots, k$ . Wie oben gezeigt gilt eine Darstellung  $P(x) = \sum_{j=0}^k a_j (x - x_0)^j$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Mit (21.1) folgt  $a_i = 0$  für alle  $i = 0, \dots, k$ .  $\square$

**Folgerung 21.1** Das  $k$ -te Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt  $x_0$  eines Polynoms  $f$  vom Grad höchstens  $k$  ist  $f$  selbst.

In der Situation von Lemma 21.1 heißt die Funktion

$$(21.3) \quad R_k : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad R_k(x) = f(x) - P_k(x)$$

das Restglied  $k$ -ter Ordnung der Taylorentwicklung in  $x_0$ . Knackpunkt bei der Taylorentwicklung ist die Abschätzung dieses Restglieds und damit eine Aussage darüber, wie gut die Funktion durch das Taylorpolynom approximiert wird. Hierfür gibt es verschiedene mögliche Darstellungen von  $R_k$ .

**Satz 21.1 (Integraldarstellung des Restglieds)** Sei  $f \in C^{k+1}(I)$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ , und  $P_k(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$  das  $k$ -te Taylorpolynom im Punkt  $x_0 \in I$ . Dann gilt

$$f(x) = P_k(x) + R_k(x) \quad \text{mit} \quad R_k(x) = \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x (x - y)^k f^{(k+1)}(y) dy.$$

BEWEIS: Durch Induktion über  $k \in \mathbb{N}_0$ . Für  $k = 0$  folgt aus dem Hauptsatz

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(y) dy.$$

Für  $k \geq 1$  folgt induktiv mit partieller Integration, vgl. Lemma 20.2 für den Fall  $k = 1$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{k-1}(x) + \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_0}^x (x-y)^{k-1} f^{(k)}(y) dy \\ &= P_{k-1}(x) + \frac{1}{(k-1)!} \left( \left[ -\frac{(x-y)^k}{k} f^{(k)}(y) \right]_{y=x_0}^{y=x} + \int_{x_0}^x \frac{(x-y)^k}{k} f^{(k+1)}(y) dy \right) \\ &= P_k(x) + \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x (x-y)^k f^{(k+1)}(y) dy. \end{aligned}$$

□

Die zweite Darstellung des Restglieds ist vielleicht etwas populärer.

**Satz 21.2 (Lagangedarstellung des Restglieds)** Sei  $f \in C^{k+1}(I)$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann gibt es zu  $x_0, x \in I$  ein  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$ , so dass gilt:

$$(21.4) \quad f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + R_k(x) \quad \text{mit} \quad R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}.$$

BEWEIS: Wir verwenden den Mittelwertsatz der Integralrechnung mit Gewicht, siehe Folgerung 14.2, Analysis I: ist  $\varphi \in C^0(I)$  mit  $\varphi \geq 0$ , so gibt es zu  $f \in C^0(I)$  ein  $\xi \in I$  mit

$$\int_I f \varphi = f(\xi) \int_I \varphi.$$

Sei nun  $x > x_0$ . Dann können wir  $I = [x_0, x]$  und  $\varphi(y) = (x - y)^k$  wählen. Es folgt

$$\frac{1}{k!} \int_{x_0}^x (x - y)^k f^{(k+1)}(y) dy = \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(\xi) \int_{x_0}^x (x - y)^k dy = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1},$$

für ein  $\xi \in [x_0, x]$ . Der Fall  $x < x_0$  ist analog, der Satz ist bewiesen. □

**Beispiel 21.1** Betrachte für  $x \in (-1, 1)$  die Funktion  $f(x) = (1 - x)^{-1/2}$ , mit Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - x)^{-3/2} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{3}{4}(1 - x)^{-5/2}.$$

Es gilt  $f(0) = 1$  und  $f'(0) = 1/2$ , also lautet das Taylorpolynom der Ordnung Eins in  $x_0 = 0$

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + \frac{1}{2}x,$$

mit der Lagrange-Restglieddarstellung

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2} x^2 = \frac{3}{8} (1 - \xi)^{-5/2} x^2 \quad \text{für ein } \xi \in [0, x].$$

Als Anwendung erhalten wir für die relativistische Energie eines Teilchens mit Ruhemasse  $m_0$  und Geschwindigkeit  $v$ , wenn wir  $\beta = v/c$  setzen,

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{f''(\xi)}{2} \beta^4 \right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \Delta E.$$

Dabei ist der erste Term die Ruheenergie und der zweite die klassische kinetische Energie. Für den relativistischen Korrekturterm ergibt sich aus der Restglieddarstellung die Abschätzung

$$\frac{\Delta E}{E_{kin}} = f''(\xi) \beta^2 \leq f''(\beta^2) \beta^2 < 0,008 \quad \text{für } \beta \leq 0,1.$$

Bei Geschwindigkeiten  $v \leq \frac{1}{10} c$  beträgt die relativistische Korrektur weniger als ein Prozent der klassischen kinetischen Energie.

Allgemein gilt folgende Approximationseigenschaft des Taylorpolynoms.

**Satz 21.3 (Approximation durch das Taylorpolynom)** Sei  $f \in C^k(I)$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ , und  $P_k$  das  $k$ -te Taylorpolynom von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0 \in I$ . Dann ist  $P_k$  das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad höchstens  $k$  mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_k(x)}{(x - x_0)^k} = 0.$$

BEWEIS: Nach Satz 21.2 gibt es zu  $x \in I$  ein  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$  mit

$$\frac{f(x) - P_k(x)}{(x - x_0)^k} = \frac{f(x) - P_{k-1}(x)}{(x - x_0)^k} - \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) = \frac{1}{k!} (f^{(k)}(\xi) - f^{(k)}(x_0)).$$

Da  $f^{(k)}$  stetig, ist  $|f^{(k)}(\xi) - f^{(k)}(x_0)| < \varepsilon$  für  $|x - x_0| < \delta$ , womit die Konvergenz gegen Null bewiesen ist. Für die Eindeutigkeit ist zu zeigen, dass für  $P(x) = \sum_{j=0}^k a_j (x - x_0)^j$  gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{(x - x_0)^k} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \dots = a_k = 0.$$

Sei induktiv schon  $a_0 = \dots = a_{j-1} = 0$  gezeigt mit  $0 \leq j \leq k$ . Dann folgt

$$a_j = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{-j} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{k-j} (x - x_0)^{-k} P(x) = 0.$$

□

Wir haben bis jetzt die Differenz  $f(x) - P_k(x)$  für festes  $k$  und  $x \rightarrow x_0$  untersucht. Jetzt nehmen wir einen anderen Standpunkt ein und fragen uns, ob die Folge  $P_k(x)$  die Funktion  $f(x)$  für  $k \rightarrow \infty$  approximiert.

**Definition 21.1** Für  $f \in C^\infty(I)$  und  $x_0 \in I$  heißt die Reihe

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

Taylorreihe von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0$ .

Die Taylorreihe ist eine Potenzreihe, mit Entwicklungspunkt  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Nach dem Satz vom Konvergenzradius gibt ein  $R \in [0, \infty]$ , so dass die Reihe für  $|x - x_0| < R$  absolut konvergiert, für  $|x - x_0| > R$  dagegen divergiert, siehe Analysis I, Satz 13.1. Selbst wenn die Reihe einen positiven Konvergenzradius hat, muss sie aber keineswegs gegen die gegebene Funktion konvergieren.

**Beispiel 21.2** Betrachte  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Es gilt  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  nach Folgerung 11.2, Analysis I, insbesondere  $f^{(j)}(0) = 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$ . Also sind die Koeffizienten der Taylorreihe alle Null und damit auch alle Partialsummen, die Reihe konvergiert somit gegen die Nullfunktion, nicht gegen  $f$ . Übrigens hätten wir dies auch aus dem Identitätssatz für Potenzreihen, Satz 13.7, Analysis I, schließen können, denn die Menge  $f^{-1}\{0\}$  hat einen Häufungspunkt in  $x = 0$ .

**Definition 21.2 (analytische Funktion)**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  offen, heißt *analytisch*, wenn jedes  $x_0 \in I$  eine Umgebung  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  hat, auf der  $f$  durch eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $x_0$  dargestellt wird:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Die darstellende Potenzreihe kann nur die Taylorreihe sein. Denn  $f$  ist  $C^\infty$  auf  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  nach Satz 13.5, Analysis I, und gliedweise Differentiation der Reihe ergibt

$$f^{(i)}(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{ik} k! a_k = i! a_i.$$

Eine Funktion ist also genau dann analytisch, wenn sie  $C^\infty$  ist und für jedes  $x_0 \in I$  gilt: die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt  $x_0$  konvergiert punktweise gegen  $f$  nahe bei  $x_0$ .

Die mehrdimensionale Taylorentwicklung orientiert sich am Fall  $n = 1$ , nur ist der Notationsaufwand größer. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und konvex. Für  $f \in C^k(\Omega)$  definieren wir die  $k$ -te Ableitung  $D^k f(x)$  im Punkt  $x \in \Omega$  als  $k$ -Linearform  $D^k f(x) : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei

$$(21.5) \quad D^k f(x)(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n (\partial_{i_1 \dots i_k}^k f)(x)(v_1)_{i_1} \dots (v_k)_{i_k}.$$

Betrachte jetzt für  $x_0, x \in \Omega$  die  $C^k$ -Funktion, vgl. Folgerung 18.1,

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(t) = f(x_0 + th) \quad \text{mit } h = x - x_0.$$

Wir zeigen durch Induktion die Formel

$$(21.6) \quad \varphi^{(k)}(t) = D^k f(x_0 + th)(h, \dots, h).$$

Für  $k = 1$  gilt das nach Kettenregel und Satz 18.1, denn

$$\varphi'(t) = Df(x_0 + th)h = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x_0 + th)h_i.$$

Für  $k \geq 2$  ergibt sich induktiv mit Satz 17.2 von Schwarz

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n (\partial_{i_1 \dots i_{k-1}}^{k-1} f)(x_0 + th) h_{i_1} \dots h_{i_{k-1}} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n \sum_{i=1}^n (\partial_{i_1 \dots i_{k-1} i}^k f)(x_0 + th) h_{i_1} \dots h_{i_{k-1}} h_i \\ &= D^k f(x_0 + th)(h, \dots, h). \end{aligned}$$

Satz 21.2, angewandt auf die Funktion  $\varphi$ , liefert sofort eine erste Fassung der mehrdimensionalen Taylorentwicklung.

**Lemma 21.2** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und konvex, und sei  $f \in C^{k+1}(\Omega)$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann gibt es zu  $x_0, x \in \Omega$  ein  $\xi = (1 - \tau)x_0 + \tau x$ ,  $\tau \in [0, 1]$ , so dass mit  $h = x - x_0$  gilt:

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{D^j f(x_0)(h, \dots, h)}{j!} + \frac{D^{k+1} f(\xi)(h, \dots, h)}{(k+1)!}.$$

BEWEIS: Wir wenden auf die  $C^{k+1}$ -Funktion  $\varphi(t) = f(x_0 + th)$  die eindimensionale Taylorsche Formel an, mit Entwicklungspunkt  $t_0 = 0$ . Nach Satz 21.2 gibt es ein  $\tau \in [0, 1]$  mit

$$\varphi(1) = \sum_{j=0}^k \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} + \frac{\varphi^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}.$$

Einsetzen von (21.6) liefert die Behauptung. □

Die  $k$ -te Ableitung  $D^k f(x)(h, \dots, h)$  ist eine Summe von  $n^k$  Termen, von denen viele aber gleich sind wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. Es ist ökonomischer, die Summe danach zu ordnen, wie oft nach den einzelnen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  differenziert wird. Gleichzeitig führt das wie im Eindimensionalen auf eine Taylordarstellung mit Basispolynomen. Für einen Multiindex  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  setzen wir

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \dots + \alpha_n && \text{Ordnung von } \alpha, \\ \alpha! &= (\alpha_1)! \cdot \dots \cdot (\alpha_n)! && \alpha\text{-Fakultät}, \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} && \text{Monom mit Exponent } \alpha, \\ D^\alpha &= \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} && (D^0 = \text{Id}). \end{aligned}$$

Im Operator  $D^\alpha$  wird also  $\alpha_i$  mal nach  $x_i$  differenziert.

**Satz 21.4 (Taylorentwicklung im  $\mathbb{R}^n$ )** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und konvex, und sei  $f \in C^{k+1}(\Omega)$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann gibt es zu  $x_0, x \in \Omega$  ein  $\xi = (1 - \tau)x_0 + \tau x$ ,  $\tau \in [0, 1]$ , so dass gilt:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha.$$

BEWEIS: Sei  $\alpha$  Multiindex der Ordnung  $|\alpha| = k$ . Wieviele Tupel  $(i_1, \dots, i_k)$  gibt es, in denen jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  genau  $\alpha_i$  mal vorkommt? Wähle  $\alpha_1$  Stellen für  $i = 1$ , aus den übrigen  $\alpha_2$  Stellen für  $i = 2$ , etc. Das ergibt die Zahl

$$\binom{k}{\alpha_1} \cdot \binom{k - \alpha_1}{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \binom{k - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1})}{\alpha_n} = \frac{k!}{(\alpha_1)! \dots (\alpha_n)!} = \frac{k!}{\alpha!}.$$

Die behauptete Entwicklung folgt nun aus Lemma 21.2 und der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen, siehe Folgerung 17.1.  $\square$

Sei  $I(n, k)$  die Menge aller  $n$ -Multiindizes mit  $|\alpha| = k$ . Es gilt dann

$$I(n + 1, k) = \bigcup_{\ell=0}^k \{(\alpha, \ell) : \alpha \in I(n, k - \ell)\}.$$

Also gilt  $\#I(n + 1, k) = \sum_{\ell=0}^k \#I(n, k - \ell)$ , und induktiv folgt leicht  $\#I(n, k) \leq (k + 1)^{n-1}$ . Für große  $k$  ist das viel kleiner als die Zahl  $n^k$  aus der vorigen Darstellung der Taylorformel.

Eine Funktion  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Polynom vom Grad  $k \geq 0$ , wenn es  $a_\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $|\alpha| \leq k$ , gibt mit  $a_\alpha \neq 0$  für mindestens ein  $|\alpha| = k$ , so dass gilt:

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Für  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  beliebig bilden die Monome  $(x - x_0)^\alpha$  mit  $0 \leq |\alpha| \leq k$  eine Basis des Raums  $\mathbb{P}_k$  der Polynome vom Grad  $\leq k$ . Dies folgt wie für  $n = 1$  aus der Ableitungsregel

$$P(x) = \sum_{|\beta| \leq k} a_\beta (x - x_0)^\beta \quad \Rightarrow \quad D^\alpha P(x_0) = \alpha! a_\alpha \quad \text{für } |\alpha| \leq k.$$

Es folgt analog Lemma 21.1): das  $k$ -te Taylorpolynom

$$(21.7) \quad P_k(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

ist das eindeutige Polynom vom Grad höchstens  $k$  mit  $D^\alpha P(x_0) = D^\alpha f(x_0)$  für  $|\alpha| \leq k$ .

**Folgerung 21.2** *Das  $k$ -te Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt  $x_0$  eines Polynoms  $f$  vom Grad höchstens  $k$  ist  $f$  selbst.*

**Beispiel 21.3 (Polynomialformel)** Die Funktion  $f(x) = (x_1 + \dots + x_n)^k$  ist ein Polynom vom Grad  $k$ , und es gilt

$$D^\alpha f(0) = \begin{cases} k! & \text{falls } |\alpha| = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Folgerung 21.2 (oder direkt durch Abzählen) ergibt sich

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha.$$

Auch im Mehrdimensionalen approximiert das  $k$ -te Taylorpolynom bis auf Terme höherer Ordnung, nur müssen wir jetzt im Nenner Beträge setzen, da bekanntlich durch Vektoren nicht dividiert werden kann.

**Satz 21.5 (Approximation durch das Taylorpolynom im  $\mathbb{R}^n$ )** Sei  $f \in C^k(\Omega)$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ , und  $P_k$  das  $k$ -te Taylorpolynom von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0 \in \Omega$ . Dann ist  $P_k$  das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad höchstens  $k$  mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_k(x)}{|x - x_0|^k} = 0.$$

BEWEIS: Nach Satz 21.4, mit  $k$  statt  $k + 1$ , gibt es zu  $x \in \Omega$  ein  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$  mit

$$f(x) - P_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha.$$

Da  $D^\alpha f$  stetig und  $|(x - x_0)^\alpha| \leq |x - x_0|^k$ , folgt die Konvergenz gegen Null. Für die Eindeutigkeit zeigen wir für ein beliebiges Polynom  $P(x)$  vom Grad  $\leq k$  folgende Implikation:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{|x - x_0|^k} = 0 \quad \Rightarrow \quad P(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Angenommen es gibt  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  mit  $P(x_1) \neq 0$ , oBdA  $x_1 \neq x_0$ . Mit  $x_t = x_0 + t(x_1 - x_0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , ist  $\varphi(t) = P(x_t)$  eindimensionales Polynom vom Grad  $\leq k$ , und wegen  $\lim_{t \rightarrow 0} x_t = x_0$  folgt

$$\frac{\varphi(t)}{|t|^k} = |x_1 - x_0|^k \frac{P(x_t)}{|t(x_1 - x_0)|^k} = |x_1 - x_0|^k \frac{P(x_t)}{|x_t - x_0|^k} \rightarrow 0 \quad \text{mit } t \rightarrow 0.$$

Nach Beweis von Satz 21.3 ist  $\varphi(t) \equiv 0$ , im Widerspruch zu  $\varphi(1) = P(x_1) \neq 0$ . □

Um das relative Verhalten von Funktionen bei Grenzprozessen zu beschreiben, werden oft die Landauschen Symbole  $\mathcal{O}$  und  $o$  benutzt. Seien  $f, g$  zwei Funktionen, die auf  $B_\delta(x_0)$  definiert sind, und es gelte  $g(x) \neq 0$  für  $x$  nahe bei  $x_0$ . Dann schreibt man

$$\begin{aligned} f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0, \\ f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0 &\Leftrightarrow \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty. \end{aligned}$$

In Worten: die Funktion  $f(x)$  ist klein- $o$  von  $g(x)$  beziehungsweise groß- $\mathcal{O}$  von  $g(x)$  für  $x \rightarrow x_0$ . Diese Begriffe sind analog für Grenzwerte  $|x| \rightarrow \infty$  usw. erklärt. Im obigen Approximationssatz gilt  $f(x) - P_k(x) = o(|x - x_0|^k)$  für  $x \rightarrow x_0$ , aber häufig wird das in Form einer Entwicklung geschrieben:

$$f(x) = P_k(x) + o(|x - x_0|^k) \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

**Beispiel 21.4** Wir berechnen hier mit der Multiindexnotation die Taylorentwicklung erster Ordnung im Punkt  $(1, 1)$  für

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$

Es ist  $f(1, 1) = 0$ , und die partiellen Ableitungen der Funktion lauten

$$\begin{aligned} D^{(1,0)}f(x, y) &= \frac{2y}{(x+y)^2} & D^{(0,1)}f(x, y) &= -\frac{2x}{(x+y)^2} \\ D^{(2,0)}f(x, y) &= -\frac{4y}{(x+y)^3} & D^{(1,1)}f(x, y) &= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} & D^{(0,2)}f(x, y) &= \frac{4x}{(x+y)^3}. \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom erster Ordnung ist somit

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= f(1, 1) + D^{(1,0)}f(1, 1)((x, y) - (1, 1))^{(1,0)} + D^{(0,1)}f(1, 1)((x, y) - (1, 1))^{(0,1)} \\ &= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) = \frac{1}{2}(x-y). \end{aligned}$$

Das Restglied lautet in Lagrangedarstellung mit Zwischenpunkt  $(\xi, \eta)$

$$\begin{aligned} R_1(x, y) &= \frac{D^{(2,0)}f(\xi, \eta)}{2!0!}((x, y) - (1, 1))^{(2,0)} + \frac{D^{(1,1)}f(\xi, \eta)}{1!1!}((x, y) - (1, 1))^{(1,1)} \\ &\quad + \frac{D^{(0,2)}f(\xi, \eta)}{0!2!}((x, y) - (1, 1))^{(0,2)} \\ &= \frac{2}{(\xi + \eta)^3}(-\eta(x-1)^2 + (\xi - \eta)(x-1)(y-1) + \xi(y-1)^2). \end{aligned}$$

Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die in der Nähe jedes Punkts  $x_0 \in \Omega$  durch eine Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} a_{\alpha}(x - x_0)^{\alpha} \quad \text{mit } a_{\alpha} \in \mathbb{R}$$

dargestellt werden können, heißt reell-analytisch. Unsere eindimensionalen Überlegungen lassen sich auch in diesem Punkt verallgemeinern, worauf wir jedoch aus Zeitgründen verzichten.

## 22 Parameterabhängige Integrale

In diesem Abschnitt behandeln wir Integrale, deren Integranden von zusätzlichen Parametern abhängen. Dies ist eine typische Problematik in zahlreichen Anwendungen. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $I = [a, b]$  ein kompaktes Intervall. Für eine gegebene Funktion  $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x, y)$ , betrachten wir die neue Funktion

$$(22.1) \quad \phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \int_I f(x, y) dy.$$

Diese Funktion wird als parameterabhängiges Integral bezeichnet, wobei die Parameter hier die Punkte  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$  sind. Damit  $\phi$  wohldefiniert ist, müssen die Integrale existieren, also sollte für jedes  $x \in \Omega$  die Funktion  $f(x, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto f(x, y)$ , Riemann-integrierbar sein. Wir interessieren uns für die Stetigkeit und Ableitung der Funktion  $\phi(x)$ . Ein nützlicher Begriff ist dabei die Oszillationsfunktion einer Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\text{osc}(f, \delta) = \sup\{|f(x) - f(x')| : x, x' \in D, |x - x'| < \delta\}.$$

Die Funktion  $f$  ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \text{osc}(f, \delta) = 0$ .

**Satz 22.1 (Stetigkeit von Parameterintegralen)** Sei  $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x, y)$ , wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $I = [a, b]$  kompakt. Ist  $f \in C^0(\Omega \times I)$ , so ist die Funktion

$$\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \int_I f(x, y) dy,$$

wohldefiniert und stetig.

BEWEIS: Die Funktion  $\phi(x)$  ist wohldefiniert, denn für  $x \in \Omega$  ist  $f(x, \cdot) \in C^0(I)$  und damit Riemann-integrierbar (siehe Satz 14.5). Wir berechnen für  $x, x' \in \Omega$

$$|\phi(x') - \phi(x)| \leq \int_I |f(x', y) - f(x, y)| dy \leq |I| \sup_{y \in I} |f(x', y) - f(x, y)|.$$

Wähle  $R > 0$  mit  $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ . Dann ist  $f(x, y)$  gleichmäßig stetig auf  $\overline{B_R(x)} \times I$ , vgl. Satz 14.4, insbesondere folgt für  $|x' - x| < \delta \leq R$

$$\sup_{y \in I} |f(x', y) - f(x, y)| \leq \text{osc}(f|_{\overline{B_R(x)} \times I}, \delta) \rightarrow 0 \quad \text{mit } \delta \rightarrow 0.$$

□

Wir gehen direkt weiter zur Differenzierbarkeit und Berechnung der Ableitung.

**Satz 22.2 (Differentiation unter dem Integral)** Sei  $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x, y)$ , wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $I = [a, b]$  kompakt. Es gelte:

(a)  $f(x, \cdot)$  ist Riemann-integrierbar für jedes  $x \in \Omega$ .

(b) Die partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  existiert und ist stetig auf  $\Omega \times I$ .

Dann ist  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi(x) = \int_I f(x, y) dy$ , nach  $x_j$  partiell differenzierbar, und zwar gilt

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) dy \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Sind  $f$  und  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  in  $C^0(\Omega \times I)$ , so ist  $\phi \in C^1(\Omega)$ .

BEWEIS: Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\frac{f(x + he_j, y) - f(x, y)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x + she_j, y) ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) ds.$$

Sei wieder  $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$  und  $|h| < \delta \leq R$ , dann schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\phi(x + he_j) - \phi(x)}{h} - \int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) dy \right| &= \left| \int_I \left( \frac{f(x + he_j, y) - f(x, y)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right) dy \right| \\ &= \left| \int_I \int_0^1 \left( \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right) ds dy \right| \\ &\leq \int_I \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right| ds dy \\ &\leq |I| \operatorname{osc} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{\overline{B_R(x)} \times I}, \delta \right) \rightarrow 0 \quad \text{mit } \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Vertauschung der Ableitung mit dem Integral gerechtfertigt. Satz 22.1 impliziert weiter  $\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \in C^0(\Omega)$ . Sind nun  $f$  und alle  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  in  $C^0(\Omega \times I)$ , so folgt  $\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \in C^0(\Omega)$  aus Satz 22.1 bzw. wie gerade gezeigt.  $\square$

**Beispiel 22.1** Wir berechnen hier das Integral der Gaußschen Dichtefunktion (das früher auf 10-Mark-Scheinen zu finden war)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Der Beweis ist trickreich, ich wäre wohl selbst nicht drauf gekommen. Setze

$$F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \left( \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \right)^2,$$

und berechne mit Hauptsatz und anschließender Substitution  $\xi = xy$ , also  $d\xi = xdy$ ,

$$F'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi = \int_0^1 2xe^{-(1+y^2)x^2} dy = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy,$$

wobei  $f(x, y) = -e^{-(1+y^2)x^2} / (1+y^2)$ . Da  $f$  auf  $(0, \infty) \times [0, 1]$  glatt ist, können wir nach Satz 22.2 den Operator  $\frac{\partial}{\partial x}$  herausziehen, und mit  $\phi(x) = \int_0^1 f(x, y) dy$  folgt

$$\phi'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy = F'(x).$$

Nun gilt  $F(0) - \phi(0) = \int_0^1 (1+y^2)^{-1} dy = \arctan 1 = \pi/4$ , also  $F(x) = \phi(x) + \pi/4$  für alle  $x \in [0, \infty)$ . Aber  $|\phi(x)| \leq e^{-x^2} \rightarrow 0$  mit  $x \rightarrow \infty$ , und so

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{F(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

In dieser Vorlesung werden wir aus Zeitgründen kein mehrdimensionales Integral behandeln, dies soll in Analysis 3 ausführliches Thema sein. Immerhin können wir als nützliche Anwendung hier die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge in Mehrfachintegralen folgern.

**Satz 22.3 (Kleiner Fubini)** Seien  $I = [a, b]$ ,  $J = [\alpha, \beta]$  kompakte Intervalle. Dann gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy \right) dx \quad \text{für } f \in C^0(I \times J).$$

BEWEIS: Wir betrachten die Funktionen  $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\phi(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_a^x f(\xi, y) d\xi \right) dy \quad \text{und} \quad \psi(x) = \int_a^x \left( \int_{\alpha}^{\beta} f(\xi, y) dy \right) d\xi.$$

Nach Satz 22.1 sind  $y \mapsto \int_a^x f(\xi, y) d\xi$  sowie  $\xi \mapsto \int_{\alpha}^{\beta} f(\xi, y) dy$  stetig, und damit beide Seiten wohldefiniert mit  $\phi(a) = \psi(a) = 0$ . Wir zeigen  $\phi'(x) = \psi'(x)$  für alle  $x \in I$ , woraus die Behauptung  $\phi(b) = \psi(b)$  folgt. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert

$$\psi'(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy.$$

Weiter hat die Funktion  $F(x, y) = \int_a^x f(\xi, y) d\xi$  die partielle Ableitung  $\frac{\partial F}{\partial x} = f \in C^0(I \times J)$ , und aus Satz 22.2 folgt

$$\phi'(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy.$$

□

Alternativ kann der kleine Fubini auch durch Approximation mit Riemannschen Summen in beiden Variablen bewiesen werden.

Wir kommen jetzt zu einer Anwendung in der Variationsrechnung, und zwar betrachten wir Integrale des folgenden Typs:

$$\mathcal{F} : C^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(u) = \int_a^b f(t, u(t), u'(t)) dt.$$

Abstrakt ist  $\mathcal{F}$  eine reelle Funktion auf dem Raum  $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ . Da es sich aber nicht um eine Funktion von endlich vielen reellen Variablen handelt, wie wir sie bisher hatten, wird meistens die Bezeichnung *Funktional* oder *Variationsintegral* benutzt. Das Funktional  $\mathcal{F}$  ist dabei definiert durch die *Lagrangefunktion*

$$f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f = f(t, x, v).$$

Hier ein paar Beispiele.

**Beispiel 22.2** Die Bogenlänge von  $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  ist das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b |u'(t)| dt, \quad \text{also } f(t, x, v) = |v|.$$

Die Formel kann wie folgt motiviert werden: für eine Zerlegung  $a = t_0 < \dots < t_N$  ergibt sich als Näherung der Bogenlänge

$$\sum_{i=1}^N |u(t_i) - u(t_{i-1})| \approx \sum_{i=1}^N |u'(t_i)| \Delta t_i.$$

Rechts steht aber die Riemannsche Summe für die Funktion  $|u'(t)|$ .

**Beispiel 22.3** Soll der Kalorienbedarf beim Querfeldeinlauf ermittelt werden, so spielt nicht nur die Länge der Strecke eine Rolle, sondern auch die wechselnde Qualität des Bodens. Dies könnte durch eine Gewichtsfunktion als Faktor beschrieben werden:

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b \omega(u(t)) |u'(t)| dt, \quad \text{also } f(t, x, v) = \omega(x)|v|.$$

**Beispiel 22.4** Hier beschreibt  $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  die Bahn eines Teilchens der Masse  $m$  in einem Kraftfeld mit Potential  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Es ist dann  $\frac{m}{2}|u'(t)|^2$  die kinetische und  $V(u(t))$  die potentielle Energie des Teilchens zur Zeit  $t$ . Das Wirkungsintegral bildet die Differenz aus kinetischer und potentieller Energie, integriert auf  $I$ :

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b \left( \frac{m}{2}|u'(t)|^2 - V(u(t)) \right) dt, \quad \text{also } f(t, x, v) = \frac{m}{2}|v|^2 - V(x).$$

Funktionen, für die ein Funktional einen kleinsten oder größten Wert annimmt, sind natürlich von zentralem Interesse. Wir werden zeigen, dass eine extremale Funktion eine gewisse Differentialgleichung erfüllt, die Euler-Lagrange Gleichung. Unser Ansatz besteht darin, Variationen  $u(\varepsilon, t)$  der extremalen Funktion  $u(t)$  zu betrachten, die von einem Parameter abhängen:

$$u : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad u = u(\varepsilon, t), \quad \text{wobei } u(0, \cdot) = u.$$

Ableitung der Variation nach dem Parameter ergibt das zugehörige Vektorfeld

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi(t) = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(0, t).$$

**Lemma 22.1 (Erste Variation)** Sei  $f = f(t, x, v)$  Lagrangefunktion mit  $f$  und  $D_v f$  stetig differenzierbar auf  $I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Für  $u \in C^2((-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times I, \mathbb{R}^n)$  betrachte

$$\phi(\varepsilon) = \mathcal{F}(u(\varepsilon, \cdot)) = \int_a^b f(t, u(\varepsilon, t), \frac{\partial u}{\partial t}(\varepsilon, t)) dt.$$

Dann gilt mit  $\varphi = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(0, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Formel

$$(22.2) \quad \frac{d\phi}{d\varepsilon}(0) = \int_a^b \langle L_f(u), \varphi \rangle dt + \left[ \langle D_v f(t, u, u'), \varphi \rangle \right]_{t=a}^{t=b}.$$

Dabei ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$  und  $L_f(u) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist gegeben durch

$$L_f(u) = D_x f(t, u, u') - \frac{d}{dt} [D_v f(t, u, u')].$$

BEWEIS: Die Verkettung  $(\varepsilon, t) \mapsto f(t, u(\varepsilon, t), \frac{\partial u}{\partial t}(\varepsilon, t))$  ist von der Klasse  $C^1$ . Deshalb kann nach Satz 22.2 unter dem Integralzeichen differenziert werden. Es folgt mit der Kettenregel

$$\phi'(0) = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, u, u') \frac{\partial u_i}{\partial \varepsilon}(0, t) + \frac{\partial f}{\partial v_i}(t, u, u') \frac{\partial^2 u_i}{\partial \varepsilon \partial t}(0, t) \right) dt.$$

Mit  $\varphi(t) = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(0, t)$  folgt, indem wir hinten die Ableitungen vertauschen,

$$(22.3) \quad \phi'(0) = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, u, u') \varphi_i(t) + \frac{\partial f}{\partial v_i}(t, u, u') \varphi_i'(t) \right) dt.$$

Schließlich mit partieller Integration im hinteren Term

$$\phi'(0) = \int_a^b \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, u, u') - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial v_i}(t, u, u') \right] \right)}_{= L_f(u)_i} \varphi_i dt + \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial v_i}(t, u, u') \varphi_i \right]_{t=a}^{t=b}.$$

Die Behauptung des Lemmas folgt, indem wir die Summen als Skalarprodukte schreiben.  $\square$

Um eine optimale Funktion zu charakterisieren, müssen wir sie mit hinreichend vielen Variationen vergleichen. Das folgende Lemma gibt an, wieviele wir tatsächlich brauchen.

**Lemma 22.2** Sei  $I = (a, b)$ . Für  $f \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$  gelte

$$(22.4) \quad \int_a^b \langle f, \varphi \rangle = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^n).$$

Dann ist  $f$  die Nullfunktion.

BEWEIS: Wir zeigen das Lemma erst für  $n = 1$ . Es gibt eine Funktion  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$  mit

$$\eta(s) = 0 \quad \text{für } |s| \geq 1, \quad \eta \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \eta = 1.$$

Ein konkretes Beispiel ist, bei passender Wahl von  $a > 0$ , die Funktion

$$\eta(s) = \begin{cases} a \exp \frac{1}{s^2-1} & \text{für } |s| < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Angenommen es ist  $\varepsilon := f(t_0) > 0$  für ein  $t_0 \in I$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $f(t) \geq \varepsilon/2$  für  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset I$ . Betrachte die reskalierte Funktion

$$\eta_{t_0, \delta}(t) = \frac{1}{\delta} \eta \left( \frac{t - t_0}{\delta} \right).$$

Dann gilt  $\eta_{t_0, \delta}(t) = 0$  für  $|t - t_0| \geq \delta$ , sowie  $\int_{\mathbb{R}} \eta_{t_0, \delta} = 1$ . Nach Voraussetzung

$$0 = \int_a^b f(t) \eta_{t_0, \delta}(t) dt = \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} f(t) \eta_{t_0, \delta}(t) dt \geq \frac{\varepsilon}{2} \int_a^b \eta_{t_0, \delta}(t) dt = \frac{\varepsilon}{2},$$

ein Widerspruch. Im Fall  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  liefert die Voraussetzung, für alle  $\varphi \in C_c^\infty(I)$ ,

$$0 = \int_a^b \langle f, \varphi e_i \rangle = \int_a^b f_i \varphi.$$

Aus obigem folgt  $f_i = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ , das Lemma ist bewiesen.  $\square$

**Satz 22.4 (Euler-Lagrange-Gleichungen)** Sei  $\mathcal{F}(u) = \int_a^b f(t, u, u')$  ein Variationsintegral mit  $f \in C^2(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ,  $f = f(t, x, v)$ . Sei  $u \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$  stationärer Punkt, d. h.

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(u + \varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^n).$$

Dann gelten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$L_f(u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, u, u') - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial v_i}(t, u, u') = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

**Bemerkung.** Es handelt sich um ein System von  $n$  Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wie man durch Ausdifferenzieren des zweiten Terms sieht.

BEWEIS: Die Randterme in (22.1) verschwinden, da  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$  nach Voraussetzung. Die Aussage folgt dann aus den Lemmas 22.1 und 22.2.  $\square$

**Beispiel 22.5 (Bogenlänge)** Wir betrachten die Bogenlänge aus Beispiel 22.2

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b |u'(t)| dt \quad \text{für } u \in C^2([a, b], \mathbb{R}^n).$$

Die Lagrangefunktion und ihre Ableitung sind

$$f(t, x, v) = |v|, \quad D_v f(t, x, v) = \frac{v}{|v|} \quad \text{falls } v \neq 0.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten somit

$$L_f(u) = -\frac{d}{dt} \frac{u'}{|u'|} = 0.$$

Die Gleichung sagt aus, dass der Einheitstangentenvektor  $\frac{u'}{|u'|}$  konstant ist. Es ist nicht schwer zu sehen, dass  $u(t)$  dann die Strecke von  $u(a)$  nach  $u(b)$  durchläuft. Allerdings wird zur Herleitung der Euler-Lagrange Gleichungen gebraucht, dass  $u'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ .

**Beispiel 22.6** Bewegung eines Massenpunkts in einem konservativen Kraftfeld:

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b \left( \frac{m}{2} |u'|^2 - V(u(t)) \right) dt, \quad f(t, x, v) = \frac{m}{2} |v|^2 - V(x).$$

Das zugehörige Kraftfeld ist gegeben durch  $F(x) = -\text{grad } V(x)$ ; das Minuszeichen ist in der Physik üblich. Dann ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x, v) = F_i(x), \quad \frac{\partial f}{\partial v_i}(t, x, v) = mv_i.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten somit  $F(u) - mu'' = 0$ , es sind die Newtonschen Bewegungsgleichungen.

Viele interessante Parameterintegrale sind uneigentliche Integrale, zum Beispiel bei der Definition der Gammafunktion oder der Fouriertransformation. Aus Zeitgründen können wir darauf jetzt nicht eingehen, werden aber Parameterintegrale nochmals innerhalb der Theorie des Lebesgue-Integrals im dritten Semester aufgreifen.

## 23 Diffeomorphismen

Thema dieses und des folgenden Abschnitts ist die lokale Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungen. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , und es sei schon eine Lösung von  $f(x_0) = y_0$  gegeben. Dann stellen wir uns folgende Fragen:

- (1) Hat die Gleichung  $f(x) = y$  zu jedem  $y$  nahe bei  $y_0$  eine Lösung  $x$  nahe bei  $x_0$ ?
- (2) Ist  $x_0$  die einzige Lösung der Gleichung  $f(x) = y_0$  in einer Umgebung von  $x_0$ ?
- (3) Falls nicht, wie sieht die Lösungsmenge  $f^{-1}\{y_0\}$  nahe bei  $x_0$  aus?

Betrachten wir erst den affin-linearen Fall  $f(x) = Ax + b$  für  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . Wegen  $f(x_0) = y_0$  ist dann  $b = y_0 - Ax_0$ , das heißt  $f$  hat die Form  $f(x) = y_0 + A(x - x_0)$ . Also gilt

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad A(x - x_0) = y - y_0.$$

In diesem Fall liefert die Lineare Algebra folgende, sogar globale Antworten:

- (1) Es gibt eine Lösung für alle  $y \in \mathbb{R}^m \quad \Leftrightarrow \quad \text{rang } A = m.$
- (2)  $x_0$  ist einzige Lösung von  $f(x) = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \ker A = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rang } A = n.$
- (3)  $f^{-1}\{y_0\} = x_0 + \ker A$  ist affiner Unterraum der Dimension  $n - \text{rang } A.$

Sei nun  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  mit  $f(x_0) = y_0$ . Dann ist  $f$  differenzierbar in  $x_0$ , das heißt

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + R_f(x) \quad \text{wobei } R_f(x_0) = 0, DR_f(x_0) = 0.$$

Setzen wir  $A = Df(x_0)$ , so ergibt sich die Formulierung

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad A(x - x_0) + R_f(x) = y - y_0.$$

Wir wollen dies als Störung der linearen Gleichung auffassen und hoffen, dass sich die Aussagen in einer lokalen Version geeignet übertragen lassen. In diesem Abschnitt geht es um den Fall  $n = m$ , das heißt es gibt genauso viele Unbekannte wie Gleichungen. Im darauffolgenden Abschnitt über implizite Funktionen behandeln wir den Fall  $n \geq m$ .

**Definition 23.1** Eine Abbildung  $f : U \rightarrow V$  zwischen offenen Mengen  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  heißt *Diffeomorphismus der Klasse  $C^r$* , wobei  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , falls  $f$  bijektiv ist und sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  sind  $r$ -mal stetig differenzierbar.

**Beispiel 23.1** Sei  $f \in C^1(I)$ ,  $I = (a, b)$ , mit  $f' > 0$  auf ganz  $I$ , also  $f$  streng monoton wachsend. Nach Analysis I, Satz 9.4, ist dann  $J := f(I)$  ein offenes Intervall, und die Umkehrfunktion  $g : J \rightarrow I$  ist differenzierbar mit Ableitung

$$g' = \frac{1}{f' \circ g} \in C^0(J).$$

Also ist  $f$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus auf  $J = f(I)$ . Im Fall  $f' < 0$  auf  $I$  folgt das natürlich analog. Umgekehrt: ist  $f : I \rightarrow J$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus zwischen offenen Intervallen, mit Umkehrfunktion  $g : J \rightarrow I$ , so ergibt die Kettenregel

$$g(f(x)) = x \quad \Rightarrow \quad g'(f(x))f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) \neq 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz ist entweder  $f' > 0$  oder  $f' < 0$  auf  $I$ . Zum Beispiel ist die Abbildung  $f : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ ,  $f(x) = x^3$ , zwar bijektiv, genauer streng monoton wachsend, und von der Klasse  $C^1$ , aber wegen  $f'(0) = 0$  kann sie kein  $C^1$ -Diffeomorphismus sein. In der Tat, die Umkehrabbildung ist im Punkt  $y = 0$  nicht differenzierbar:

$$g : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1), g(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{für } y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

**Beispiel 23.2 (Polarkoordinaten)** Seien  $U = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$  und  $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ . Wir betrachten die Polarkoordinatenabbildung

$$f \in C^\infty(U, V), f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Die Umkehrabbildung  $g : V \rightarrow U$  lautet mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$g(x, y) = \begin{cases} \left(r, \arccos \frac{x}{r}\right) & \text{für } y > 0 \\ \left(r, \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{y}{r}\right) & \text{für } x < 0, \\ \left(r, \pi + \arccos\left(-\frac{x}{r}\right)\right) & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Die Darstellungen sind jeweils in  $C^\infty$ , also ist  $f$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus.

**Beispiel 23.3 (Inversion)** Die Inversion an der Sphäre  $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$  ist

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, f(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

Es gilt  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}^n)$  und  $f^{-1} = f$ , also ist  $f$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus. Die beschränkte Menge  $B_1(0)$  geht unter  $f$  in die unbeschränkte Menge  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}$ .

**Lemma 23.1 (Ableitung der Umkehrfunktion)** Sei  $f : U \rightarrow V$  bijektiv mit Umkehrabbildung  $g : V \rightarrow U$ , wobei  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen. Ist  $f$  in  $x_0$  und  $g$  in  $y_0 = f(x_0)$  differenzierbar, so ist die lineare Abbildung  $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  invertierbar. Insbesondere muss  $m = n$  sein. Weiter gilt

$$Dg(y_0) = Df(x_0)^{-1} \quad \text{mit } y_0 = f(x_0).$$

BEWEIS: Aus  $g(f(x)) = x$  und  $f(g(y)) = y$  folgt jeweils mit der Kettenregel

$$Dg(y_0)Df(x_0) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \quad \text{und} \quad Df(x_0)Dg(y_0) = \text{Id}_{\mathbb{R}^m}.$$

Also ist  $Df(x_0)$  injektiv und surjektiv, sprich invertierbar, und es folgt  $m = n$ . □

Das Lemma besagt, dass ein Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  nur möglich ist für  $m = n$ . Dies wird als Invarianz der Dimension bezeichnet. Nach einem Satz von Brouwer (1910) bleibt die Dimension auch unter Homeomorphismen erhalten, das heißt  $f$  und  $f^{-1}$  sind nur stetig. Peano hatte zuvor surjektive stetige Abbildungen von einem Intervall auf die Fläche eines Quadrats konstruiert, daher stellte sich die Frage nach der Invarianz der Dimension. Die Peanokurven sind aber keine Homeomorphismen, sie sind nicht injektiv. Der Satz von Brouwer wird mit dem Konzept des Abbildungsgrads bewiesen, das in der nichtlinearen Funktionalanalysis oder der Algebraischen Topologie eingeführt wird.

Man bezeichnet  $\det Df(x_0)$  als Jacobideterminante von  $f$  im Punkt  $x_0$ . In der Situation von Lemma 23.1 folgt aus dem Determinantenmultiplikationssatz

$$(23.1) \quad \det Dg(y_0) \det Df(x_0) = 1 \quad \text{für } y_0 = f(x_0).$$

**Lemma 23.2 (Höhere Ableitungen der Umkehrfunktion)** *Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen, und  $f : U \rightarrow V$  bijektiv. Ist  $f \in C^r(U, V)$  für ein  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , und ist die Umkehrabbildung  $g : V \rightarrow U$  differenzierbar, so folgt  $g \in C^r(V, U)$ .*

BEWEIS: Nach Lemma 23.1 ist  $Df(x)$  invertierbar und es gilt  $Dg = (Df)^{-1} \circ g$ , also nach der Cramerschen Regel

$$(23.2) \quad \frac{\partial g_i}{\partial y_j} = (-1)^{i+j} \frac{M_{ji}(Df)}{\det Df} \circ g.$$

Dabei bezeichnet  $M_{ji}(Df)$  die Determinante der Matrix, die aus  $Df$  durch Streichen der  $j$ -ten Zeile und  $i$ -ten Spalte entsteht. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über  $r \in \mathbb{N}$ . Da  $g$  nach Voraussetzung differenzierbar und somit stetig ist, vgl. Satz 18.2, ist für  $f \in C^1$  die rechte Seite in (23.2) stetig als Produkt, Quotient und Verkettung stetiger Funktionen, und damit  $g \in C^1$ . Ist  $f \in C^r$  und induktiv schon  $g \in C^{r-1}$ , so ist die rechte Seite von der Klasse  $C^{r-1}$  als Produkt, Quotient und Verkettung von  $C^{r-1}$ -Funktionen, siehe Folgerung 18.1, und damit  $g \in C^r$ , was zu zeigen war.  $\square$

Nach diesen Vorüberlegungen wollen wir die Frage der Existenz einer Lösung angehen. Für eine allgemeine nichtlineare Gleichung kann nicht erwartet werden, dass die Lösung durch eine explizite Formel geliefert wird. Vielmehr brauchen wir einen abstrakten Existenzsatz. Dazu die folgenden Definitionen.

**Definition 23.2** *Eine Folge  $x_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , in einem metrischen Raum  $(X, d)$  heißt Cauchyfolge, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $K \in \mathbb{R}$  gibt mit*

$$d(x_k, x_l) < \varepsilon \quad \text{für alle } k, l > K.$$

*Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge  $x_k$  in  $X$  konvergiert, das heißt es gibt ein  $x \in X$  mit  $d(x, x_k) \rightarrow 0$  mit  $k \rightarrow \infty$ .*

Natürlich ist  $\mathbb{R}^n$  mit der Euklidischen Abstandsfunktion ein vollständiger metrischer Raum. Aber jede abgeschlossene Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist mit dem Euklidischen Abstand auch ein vollständiger metrischer Raum, denn eine Cauchyfolge  $x_k \in A$  ist auch Cauchyfolge in  $\mathbb{R}^n$  und konvergiert damit gegen ein  $x \in \mathbb{R}^n$ , und es gilt  $x \in A$  wegen  $A$  abgeschlossen.

**Satz 23.1 (Fixpunktsatz von Banach)** *Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum, und  $F : X \rightarrow X$  eine Kontraktion, das heißt es gibt ein  $\theta \in [0, 1)$  mit*

$$(23.3) \quad d(F(x), F(y)) \leq \theta d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

*Dann gibt es genau ein  $x \in X$  mit  $F(x) = x$ .*

BEWEIS: Die Eindeutigkeit ist klar, denn aus  $F(x) = x$  und  $F(y) = y$  folgt

$$d(x, y) = d(F(x), F(y)) \leq \theta d(x, y) \quad \Rightarrow \quad d(x, y) = 0, \text{ also } x = y.$$

Um den Fixpunkt zu konstruieren, betrachten wir die rekursiv definierte Folge  $x_{n+1} = F(x_n)$  mit beliebigem Startwert  $x_0 \in X$ . Es folgt aus (23.3) für  $n \geq 1$

$$(23.4) \quad d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq \theta d(x_n, x_{n-1}).$$

Wir können uns einen müder werdenden Frosch vorstellen, dessen Sprünge jedes Mal um ein Faktor  $\theta \in [0, 1)$  kürzer werden. Wie weit kann der Frosch insgesamt kommen? Es folgt per Induktion aus (23.4)

$$(23.5) \quad d(x_{n+1}, x_n) \leq \theta^n d(x_1, x_0) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0,$$

und hieraus weiter mit der Dreiecksungleichung und der geometrischen Reihe

$$d(x_n, x_0) \leq \sum_{j=0}^{n-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \theta^j d(x_1, x_0) \leq \frac{1}{1-\theta} d(x_1, x_0).$$

Indem wir  $x_n$  statt  $x_0$  als Startwert auffassen, haben wir für  $m > n$

$$(23.6) \quad d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{1-\theta} d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_1, x_0).$$

Also ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Cauchyfolge, und konvergiert nach Voraussetzung gegen ein  $x \in X$ . Da  $F$  nach Voraussetzung Lipschitzstetig ist (mit Konstante  $\theta$ ), folgt

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x,$$

und die Existenz des Fixpunkts ist gezeigt. □

Aus Sicht der Numerik ist eine Abschätzung von Interesse, wie weit die Iteration im  $n$ -ten Schritt noch vom gesuchten Fixpunkt entfernt ist. Mit  $m \rightarrow \infty$  folgt aus (23.6)

$$d(x, x_n) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_1, x_0).$$

Das folgende zentrale Resultat wird auch als Umkehrsatz bezeichnet.

**Satz 23.2 (über inverse Funktionen)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Ist  $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  invertierbar, so gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $x_0$ , so dass gilt:

- (a)  $V = f(U)$  ist offene Umgebung von  $y_0 = f(x_0)$
- (b)  $f|_U : U \rightarrow V$  ist Diffeomorphismus der Klasse  $C^1$ .

Zusatz. Ist  $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$  für ein  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , so ist  $g = (f|_U)^{-1} \in C^r(V, \mathbb{R}^n)$ .

BEWEIS: **Schritt 1** Formulierung als Fixpunktproblem

Mit  $y_0 = f(x_0)$ ,  $A := Df(x_0)$  und  $R_f(x) := f(x) - (f(x_0) + A(x - x_0))$  hatten wir

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad A(x - x_0) + R_f(x) = y - y_0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_0 + A^{-1}(y - y_0 - R_f(x)).$$

Für  $y \in \mathbb{R}^n$  definieren wir also  $\phi_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\phi_y(x) = x_0 + A^{-1}(y - y_0 - R_f(x))$ , und erhalten

$$(23.7) \quad f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \phi_y(x) = x.$$

**Schritt 2** *Konstruktion der Lösung*

Wir bestimmen  $\delta_0 > 0$ , so dass für jedes  $\delta \in (0, \delta_0]$  die Abbildung  $\phi_y : \overline{B_\delta(x_0)} \rightarrow \overline{B_\delta(x_0)}$  definiert und kontrahierend ist, sofern  $y \in B_\varepsilon(y_0)$  mit  $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ . Setze  $\Lambda = |A^{-1}| \in (0, \infty)$ .  $DR_f(x) = Df(x) - A$  ist stetig mit  $DR_f(x_0) = 0$ , folglich gibt es  $\delta_0 > 0$  mit

$$\overline{B_{\delta_0}(x_0)} \subset \Omega \quad \text{und} \quad \|DR_f(x)\| \leq \frac{1}{2\Lambda} \quad \text{für } |x - x_0| \leq \delta_0.$$

Aus dem Schrankensatz, siehe Satz 19.3, folgt

$$(23.8) \quad x_{1,2} \in \overline{B_{\delta_0}(x_0)} \quad \Rightarrow \quad |R_f(x_1) - R_f(x_2)| \leq \frac{1}{2\Lambda} |x_1 - x_2|.$$

Wir berechnen nun

$$|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)| = |A^{-1}R_f(x_1) - A^{-1}R_f(x_2)| \leq \Lambda |R_f(x_1) - R_f(x_2)|.$$

Also folgt aus (23.8) die Kontraktionseigenschaft

$$(23.9) \quad x_{1,2} \in \overline{B_{\delta_0}(x_0)} \quad \Rightarrow \quad |\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)| \leq \frac{1}{2} |x_1 - x_2|.$$

Wir müssen sicherstellen, dass  $\phi_y$  eine Selbstabbildung ist. Dazu schätzen wir ab

$$\begin{aligned} |\phi_y(x) - x_0| &= |A^{-1}(y - y_0 - R_f(x))| \\ &\leq \Lambda(|y - y_0| + |R_f(x) - R_f(x_0)|) \quad (\text{da } R_f(x_0) = 0) \\ &\leq \Lambda|y - y_0| + \frac{1}{2}|x - x_0| \quad \text{für } x \in \overline{B_{\delta_0}(x_0)} \text{ nach (23.8)}. \end{aligned}$$

Also folgt für  $\delta \in (0, \delta_0]$ , wenn wir  $\varepsilon = \delta/(2\Lambda) > 0$  wählen,

$$(23.10) \quad x \in \overline{B_\delta(x_0)}, y \in B_\varepsilon(y_0) \quad \Rightarrow \quad |\phi_y(x) - x_0| < \Lambda\varepsilon + \frac{1}{2}\delta = \delta.$$

Wegen (23.10) und (23.9) ist  $\phi_y : \overline{B_\delta(x_0)} \rightarrow \overline{B_\delta(x_0)}$  eine Kontraktion mit Konstante  $\theta = 1/2$ . Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es zu jedem  $y \in B_\varepsilon(y_0)$  genau ein  $x \in \overline{B_\delta(x_0)}$  mit  $\phi_y(x) = x$ , das heißt  $f(x) = y$  nach (23.7). Es ist sogar  $x \in B_\delta(x_0)$ , denn nach (23.10) gilt  $|x - x_0| = |\phi_y(x) - x_0| < \delta$ . Die Mengen  $V = B_\varepsilon(y_0)$  und  $U = f^{-1}(V) \cap B_\delta(x_0)$  sind offen, vgl. Satz 16.4 für die Offenheit von  $U$ . Also gilt Behauptung (a), und  $f|_U : U \rightarrow V$  bijektiv.

**Schritt 3** *Differenzierbarkeit der inversen Abbildung*

Sei  $g : V \rightarrow U$  die Umkehrabbildung von  $f|_U : U \rightarrow V$ . Dann gilt

$$(23.11) \quad |g(y) - x_0| = |\phi_y(g(y)) - x_0| \leq \Lambda|y - y_0| + \frac{1}{2}|g(y) - x_0| \quad \Rightarrow \quad |g(y) - x_0| \leq 2\Lambda|y - y_0|.$$

Insbesondere ist  $g$  stetig in  $y_0$  mit  $g(y_0) = x_0$ . Wir zeigen nun  $Dg(y_0) = A^{-1}$ . Für  $y \neq y_0$  ist  $g(y) \neq x_0$  und es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{|g(y) - (g(y_0) + A^{-1}(y - y_0))|}{|y - y_0|} &= \frac{|\phi_y(g(y)) - x_0 - A^{-1}(y - y_0)|}{|y - y_0|} \\ &= \frac{|A^{-1}R_f(g(y))|}{|y - y_0|} \\ &\leq \Lambda \frac{|R_f(g(y))|}{|g(y) - x_0|} \frac{|g(y) - x_0|}{|y - y_0|}. \end{aligned}$$

Mit  $y \rightarrow y_0$  geht die rechte Seite gegen Null, denn es ist  $|g(y) - x_0|/|y - y_0| \leq 2\Lambda$  nach (23.11) und  $|R_f(x)|/|x - x_0| \rightarrow 0$  mit  $x = g(y) \rightarrow x_0$ . Dies zeigt  $Dg(y_0) = A^{-1}$ .

Um die Differenzierbarkeit von  $g$  auf  $V$  zu bekommen, wählen wir  $\delta \in (0, \delta_0]$  so klein, dass  $\det Df(x) \neq 0$  für alle  $x \in B_\delta(x_0)$ . Sei  $y \in V$  beliebig gegeben. Die Voraussetzungen des Satzes gelten dann für  $f|U \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$  und  $x = g(y) \in U$ . Wie bewiesen gibt es also  $\tilde{U} \subset U$  mit folgenden Eigenschaften:  $\tilde{V} = f(\tilde{U})$  ist offene Umgebung von  $y = f(x)$ ,  $f|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  ist bijektiv, und  $\tilde{g} = (f|_{\tilde{U}})^{-1}$  ist differenzierbar in  $y$ . Aber  $g|_{\tilde{V}} = \tilde{g}$  da  $f|U$  injektiv. Somit ist  $g$  differenzierbar in  $y \in V$ .

Lemma 23.2 liefert schließlich  $g \in C^1(V, U)$ . Ist  $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$  für ein  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , so ist  $g \in C^r(V, U)$ , ebenfalls nach Lemma 23.2.  $\square$

Als unmittelbare Konsequenz des Satzes halten wir fest:

**Folgerung 23.1** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Ist  $Df(x)$  invertierbar für alle  $x \in \Omega$ , so ist  $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$  offen.

BEWEIS: Nach Satz 23.2 hat jeder Punkt  $y \in f(\Omega)$  eine offene Umgebung  $V \subset f(\Omega)$ .  $\square$

**Beispiel 23.4** Wie wir in Beispiel 23.1 gesehen haben, bildet eine eindimensionale Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f' \neq 0$  das gesamte Definitionsintervall diffeomorph auf das Bildintervall ab, das heißt es gilt eine globale Version des Umkehrsatzes. Das folgende Beispiel zeigt, dass eine entsprechende Aussage für Funktionen mehrerer Variabler im allgemeinen nicht wahr ist. In reellen Koordinaten  $z = x + iy$  lautet die komplexe Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \exp(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

Es gilt  $\exp(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Die Jacobideterminante von  $\exp$  ist nirgends Null, genauer gilt

$$D \exp(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \Rightarrow \det D \exp(x, y) = e^{2x} \neq 0.$$

Die Abbildung ist jedoch nicht injektiv, denn es ist  $\exp(x, y + 2k\pi) = \exp(x, y)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 24 Implizite Funktionen

Thema dieses Kapitels ist die lokale Lösung nichtlinearer Gleichungen im unterbestimmten Fall, das heißt es gibt mehr Unbekannte als Bedingungen. Dazu nehmen wir an, dass die Variablen in zwei Gruppen eingeteilt sind:

$$f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k), f = f(x, y), \quad \text{wobei } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k.$$

Die Frage aus dem letzten Kapitel lautet präziser:

- Sei  $f(x_0, y_0) = z_0$  gegeben. Wie sieht die Lösungsmenge der Gleichung  $f(x, y) = z_0$  nahe bei  $(x_0, y_0)$  aus?
- Können wir die Gleichung nach  $y$  eindeutig auflösen, sprich die Lösungsmenge lokal als Graph  $y = g(x)$  darstellen?

Die Lösungen einer Gleichung  $f(x, y) = z_0$  kann im allgemeinen nicht explizit durch Umformungen berechnet werden; deshalb wird  $y = g(x)$  als implizit gegebene Funktion bezeichnet.

**Beispiel 24.1** Betrachte die Gleichung

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = 1 \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Die Lösungsmenge ist der Einheitskreis  $\mathbb{S}^1$ . Hier ist die Auflösung der Gleichung explizit möglich: ist  $(x_0, y_0) \in \mathbb{S}^1$  mit  $y_0 > 0$ , so kann  $\mathbb{S}^1$  in einer Umgebung als Graph  $y = \sqrt{1 - x^2}$  dargestellt werden. Analog im Fall  $y_0 < 0$ , mit Graphenfunktion  $y = -\sqrt{1 - x^2}$ . Dagegen hat der Punkt  $(1, 0)$  keine Umgebung, in der die Gleichung eindeutig nach  $y$  aufgelöst werden kann, für  $x < 1$  gibt es nahebei die beiden Lösungen  $(x, \pm\sqrt{1 - x^2})$ , und für  $x > 1$  gar keine.

Für eine reelle Funktion  $f = f(x, y)$  von zwei Variablen kann die Lösungsmenge der Gleichung  $f(x, y) = z_0$  als Höhenlinie interpretiert werden. Allerdings ist die Bezeichnung salopp, es kann Singularitäten geben, in denen die Menge nicht lokal wie eine Linie aussieht. Ein Beispiel ist die Gleichung  $xy = 0$ , die im Nullpunkt nicht regulär ist. Es kann vorkommen, dass alle Lösungen singuläre Punkte sind, etwa bei der Gleichung  $x^2 + y^2 = 0$ . Wir betrachten nun den linearen Fall, um ein Kriterium für die lokale Lösbarkeit von Gleichungen zu erhalten.

**Beispiel 24.2** Betrachte eine lineare Funktion von zwei Variablen, also

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = ax + by \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

Die Gleichung  $f(x, y) = z_0$  ist genau dann nach  $y$  auflösbar wenn  $b \neq 0$ , die Funktion lautet

$$y = \frac{1}{b}(z_0 - ax), \quad x \in \mathbb{R}.$$

In höheren Dimensionen ist die Sache analog. Für  $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  linear unterteilen wir die  $k \times (m + k)$ -Matrix in eine  $k \times m$ -Matrix  $A$  und eine  $k \times k$ -Matrix  $B$ , d. h.

$$f(x, y) = Ax + By \quad \text{mit } A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k), \quad B \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k).$$

Die Gleichung  $Ax + By = z_0$  hat zu festem  $x \in \mathbb{R}^m$  eine eindeutige Auflösung nach  $y$  dann und nur dann, wenn  $B$  invertierbar ist. Ist das der Fall, so lautet die Auflösung

$$y = B^{-1}(z_0 - Ax), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Allgemein schreiben wir die Jacobimatrix von  $f = f(x, y)$  in der Form

$$Df(x, y) = (D_x f(x, y), D_y f(x, y)) \in (\mathbb{R}^{k \times m}, \mathbb{R}^{k \times k}).$$

Wenn wir nach  $y = g(x)$  auflösen wollen, so sollte nach Beispiel 24.2 die Ableitung  $D_y f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{k \times k}$  invertierbar sein. In den Anwendungen ist die Einteilung in die beiden Variablengruppen nicht immer vorgegeben, das heißt es könnte nach verschiedenen Gruppen von je  $k$  Variablen aufgelöst werden. So kann der Einheitskreis in einer Umgebung von  $(1, 0)$  zwar nicht als Graph  $y = g(x)$  geschrieben werden, wohl aber als Graph  $x = g(y)$ , und außer in den vier Punkten  $\pm e_1, \pm e_2$  könnte sowohl nach  $x$  als auch nach  $y$  aufgelöst werden.

*Merkregel.* Die Ableitung nach den Variablen, nach denen aufgelöst werden soll, muss invertierbar sein. Im Fall  $k = 1$  bedeutet das einfach

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

**Satz 24.1 (über implizite Funktionen)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$  offen und  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ . Ist  $f(x_0, y_0) = z_0$  und  $D_y f(x_0, y_0) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$  invertierbar, so gibt es offene Umgebungen  $U \subset \mathbb{R}^m$  von  $x_0$  und  $V \subset \mathbb{R}^k$  von  $y_0$ , sowie eine Funktion  $g \in C^1(U, V)$ , mit

$$(24.1) \quad \{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = z_0\} = \{(x, g(x)) : x \in U\}.$$

Es folgt  $g(x_0) = y_0$ , und die Funktion  $g$  hat die Ableitung

$$(24.2) \quad Dg(x_0) = -(D_y f(x_0, y_0))^{-1} D_x f(x_0, y_0).$$

*Zusatz.* Für jedes  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  gilt die Implikation

$$f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k) \Rightarrow g \in C^r(U, \mathbb{R}^k).$$

BEWEIS: Wir verwenden einen Trick, um den Satz über inverse Funktionen anwenden zu können, und zwar betrachten wir  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k)$ ,  $F(x, y) = (x, f(x, y))$ . Es gilt

$$DF = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ D_x f & D_y f \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{m \times m} & \mathbb{R}^{m \times k} \\ \mathbb{R}^{k \times m} & \mathbb{R}^{k \times k} \end{pmatrix}.$$

Es folgt  $\det DF(x_0, y_0) = \det D_y f(x_0, y_0) \neq 0$  nach Voraussetzung<sup>1</sup>. Nach dem Umkehrsatz gibt es offene Umgebungen  $U_0 \times V$  von  $(x_0, y_0)$ ,  $W$  von  $(x_0, z_0)$ , so dass  $F : U_0 \times V \rightarrow W$  ein Diffeomorphismus ist. Wir bezeichnen die Umkehrabbildung mit  $G \in C^1(W, U_0 \times V)$ . Ist  $(x, z) \in W$ , also  $(x, z) = (x, f(x, y))$  mit  $(x, y) \in U_0 \times V$  nach Konstruktion, so folgt

$$G(x, z) = G(x, f(x, y)) = G(F(x, y)) = (x, y).$$

Also gilt  $G(x, z) = (x, g_0(x, z))$  mit  $g_0 \in C^1(W, \mathbb{R}^k)$ . Sei  $U$  die Menge der  $x \in U_0$  mit  $(x, z_0) \in W$ . Da  $W$  offen in  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ , ist  $U$  offen in  $\mathbb{R}^m$ . Außerdem ist  $x_0 \in U$  wegen  $(x_0, z_0) \in W$ . Für  $(x, y) \in U \times V$  berechnen wir

$$\begin{aligned} f(x, y) = z_0 &\Leftrightarrow F(x, y) = (x, z_0) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = G(x, z_0) \quad (\text{da } (x, z_0) \in W) \\ &\Leftrightarrow y = g_0(x, z_0). \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> $\varphi(D) = \det \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$  ist multilinear and alternierend in den Spalten von  $D$ , mit  $\varphi(E_k) = 1$

Also gilt der Satz mit  $g(x) = g_0(x, z_0)$ . Die Formel für die Ableitung folgt aus der Kettenregel:

$$f(x, g(x)) = z_0 \quad \Rightarrow \quad D_x f(x_0, y_0) + D_y f(x_0, y_0) Dg(x_0) = 0.$$

□

**Beispiel 24.3** Die Nullstellen einer quadratischen Gleichung hängen von den Koeffizienten ab. Betrachte

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(p, q, \lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q = \left(\lambda + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right).$$

Setze  $N = \{(p, q, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : f(p, q, \lambda) = 0\}$ . Für  $(p_0, q_0, \lambda_0) \in N$  berechnen wir

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(p_0, q_0, \lambda_0) = 2\left(\lambda_0 + \frac{p_0}{2}\right) \quad \text{wobei } 0 \leq \left(\lambda_0 + \frac{p_0}{2}\right)^2 = \frac{p_0^2}{4} - q_0.$$

Nach Satz 24.1 gibt es im Fall  $\frac{p_0^2}{4} - q_0 > 0$  lokal eine eindeutige Auflösung  $\lambda = \lambda(p, q)$ . Das sehen wir natürlich auch direkt mit der  $p$ - $q$ -Formel, die Auflösung ist

$$\lambda(p, q) = \begin{cases} -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{falls } \lambda_0 > -\frac{p_0}{2}, \\ -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{falls } \lambda_0 < -\frac{p_0}{2}. \end{cases}$$

Im Fall  $\frac{p_0^2}{4} - q_0 = 0$  ist die Bedingung von Satz 24.1 nicht erfüllt. Und tatsächlich gibt es für  $\frac{p^2}{4} < q$  keine Lösung, für  $\frac{p^2}{4} > q$  nahebei die zwei Lösungen aus der  $p$ - $q$ -Formel.

**Beispiel 24.4** Betrachte jetzt  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(b, \lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_0$ . Sei  $\lambda_0$  eine einfache Nullstelle von  $f(a, \lambda)$  für  $a \in \mathbb{R}^n$  fest, das heißt es gilt

$$f(a, \lambda) = (\lambda - \lambda_0)q(\lambda) \quad \text{für ein Polynom } q(\lambda) \text{ mit } q(\lambda_0) \neq 0.$$

Es folgt  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(a, \lambda_0) = q(\lambda_0) \neq 0$ . Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert eine Umgebung  $U \times V$  von  $(a, \lambda_0)$ , so dass zu jedem  $b \in U$  genau eine Nullstelle  $\lambda(b) \in V$  von  $f(b, \cdot)$  existiert. Diese hängt unendlich oft differenzierbar von  $b$  ab, und es gilt für  $0 \leq i \leq n-1$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial b_i}(a) = -\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}(a, \lambda_0)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial b_i}(a, \lambda_0) = -\frac{\lambda_0^i}{n\lambda_0^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\lambda_0^{n-2} + \dots + a_1}.$$

Wir kommen nun zurück zur Interpretation als Höhenlinie bzw. allgemeiner Niveaumenge. Wir hatten im zweidimensionalen Fall bereits heuristisch die Unterscheidung zwischen regulären und singulären Punkten gemacht. In regulären Punkten sieht eine Niveaumenge lokal wie ein Unterraum aus, insbesondere hat die Menge in dem Punkt einen Tangentialraum. Diese Konzepte sollen nun definiert werden. Den Begriff des Tangentialraums hatten wir im Fall von Graphen bereits durch Blow-up eingeführt, siehe Kapitel 18.

**Definition 24.1** Sei  $1 \leq m \leq n$ . Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heisst  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  der Klasse  $C^r$ , wobei  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , falls gilt: zu jedem  $p \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und einen  $C^r$ -Diffeomorphismus  $\phi : \Omega \rightarrow \phi(\Omega)$  mit

$$\phi(M \cap \Omega) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \phi(\Omega).$$

Wir nennen den Diffeomorphismus  $\phi$  eine (lokale) Plättung von  $M$ . Im Einzelfall kann der Nachweis, dass eine gegebene Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit ist, anhand der Definition mühevoll sein. Für Mengen, die als Niveaumengen einer Funktion gegeben sind, liefert jedoch der Satz über implizite Funktionen folgendes Kriterium.

**Satz 24.2 (Untermannigfaltigkeitskriterien)** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $m + k = n$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $M$  ist eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^r$ .
- (2) Niveaumengenkriterium: Zu jedem  $p \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und eine Funktion  $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$ , so dass  $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$  und  $\text{rang } Df(p) = k$ .
- (3) Graphenkriterium: Zu  $p \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$  und  $g \in C^r(U, V)$ , so dass nach geeigneter Permutation der Koordinaten gilt:

$$M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}.$$

BEWEIS: Wir zeigen (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (1).

Nach (1) gibt es zu jedem  $p \in M$  eine  $C^r$ -Plättung  $\phi : \Omega \rightarrow \phi(\Omega)$  mit  $p \in \Omega$ . Definiere  $f = \pi_2 \circ \phi$  wobei  $\pi_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\pi_2(x, y) = y$ . Dann folgt für  $q \in \Omega$  beliebig

$$f(q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(q) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad q \in \phi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = M \cap \Omega.$$

$\pi_2$  ist linear, insbesondere  $C^\infty$ , also ist nach Kettenregel  $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$  mit Ableitung  $Df(p) = D\pi_2(f(p))D\phi(p) = \pi_2 D\phi(p)$ . Aber  $D\phi(p)$  ist invertierbar nach Lemma 23.1, es folgt  $\text{rang } Df(p) = \text{rang } \pi_2 = k$ .

Ist (2) erfüllt, so ist nach evtl. Permutation der Koordinaten  $D_y f(p)$  invertierbar, wobei  $(x, y) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ , und (3) folgt aus dem Satz über implizite Funktionen.

Sei (3) gegeben, also  $M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}$  mit  $g \in C^r(U, V)$ , eventuell nach Permutation der Koordinaten. Die Abbildung  $\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ ,  $\phi(x, y) = (x, y - g(x))$ , ist bijektiv mit  $\phi^{-1}(x, z) = (x, z + g(x))$ . Also ist die Einschränkung  $\phi : U \times V \rightarrow \phi(U \times V)$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus, und es gilt

$$\phi(M \cap (U \times V)) = \phi(\{(x, g(x)) : x \in U\}) = U \times \{0\}.$$

Dies zeigt (1), womit der Satz insgesamt bewiesen ist. □

**Beispiel 24.5** Die Sphäre  $\mathbb{S}^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : |x| = 1\}$  ist eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^{m+1}$  der Klasse  $C^\infty$ . Denn es gilt

$$\mathbb{S}^m = f^{-1}(\{0\}) \text{ für } f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|^2 - 1.$$

Da  $Df(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{S}^m$ , ist das Niveaumengenkriterium aus Satz 24.2 anwendbar.

**Definition 24.2**  $v \in \mathbb{R}^n$  heisst *Tangentialvektor* von  $M \subset \mathbb{R}^n$  im Punkt  $p \in M$ , falls es eine Abbildung  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  gibt mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v$ . Die Menge der Tangentialvektoren von  $M$  im Punkt  $p$  wird mit  $T_p M$  bezeichnet.

Je nach Menge  $M$  kann  $T_p M$  nur aus dem Nullvektor bestehen, betrachte etwa  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0, x, y \geq 0\}$  im Punkt  $p = (0, 0)$ . Unser Interesse gilt aber dem Fall, wenn  $M$  eine Untermannigfaltigkeit ist.

**Folgerung 24.1** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dim.  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit, und  $n = m + k$ . Ist  $p \in M \cap \Omega = f^{-1}(\{0\})$  für eine Funktion  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$  mit  $\text{rang } Df(p) = k$ , so gilt

$$T_p M = \ker Df(p).$$

Insbesondere ist  $T_p M$  ein  $m$ -dimensionaler Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ .

BEWEIS: Für  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  ist  $f(\gamma(t)) = 0$ . Mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v$  folgt mit Kettenregel

$$0 = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0} = Df(p)v, \quad \text{also} \quad T_p M \subset \ker Df(p).$$

Nach Satz 24.2 gibt es andererseits, nach eventueller Permutation der Koordinaten, offene Mengen  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $V \subset \mathbb{R}^k$  mit  $p \in U \times V$ , sowie  $g \in C^1(U, V)$  mit

$$M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}.$$

Die Graphenabbildung  $G \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ,  $G(x) = (x, g(x))$ , bildet nach  $M$  ab. Mit  $p = (x_0, g(x_0))$  für  $x_0 \in U$  geeignet folgt für alle  $\xi \in \mathbb{R}^m$

$$DG(x_0)\xi = \frac{d}{dt} G(x_0 + t\xi)|_{t=0} \in T_p M, \quad \text{also} \quad \text{Bild } DG(x_0) \subset T_p M.$$

$DG(x_0)$  ist injektiv, denn  $DG(x_0)\xi = (\xi, Dg(x_0)\xi)$ , also ist  $\dim \text{Bild } DG(x_0) = m$ . Andererseits liefern Dimensionsformel und Voraussetzung

$$\dim \ker Df(p) = \dim \mathbb{R}^n - \dim \text{Bild } Df(p) = n - k = m.$$

Zusammen ergibt sich  $\text{Bild } DG(x_0) = T_p M = \ker Df(p)$ . □

Die Folgerung zeigt: für eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist der Tangentialraum ein Vektorraum der Dimension  $m$ . Damit ist die Dimension einer Untermannigfaltigkeit wohldefiniert, es kann nicht Plättungen zu verschiedenen  $m$  geben. Wir kommen nun zur Multiplikatorenregel von Lagrange.

**Satz 24.3 (Extrema mit Nebenbedingungen)** Sei  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Die Funktion  $\varphi \in C^1(\Omega)$  habe in  $p$  ein Minimum unter der Nebenbedingung  $f(q) = z_0$ , das heißt

$$f(p) = z_0 \quad \text{und} \quad \varphi(p) \leq \varphi(q) \quad \text{für alle } q \in \Omega \text{ mit } f(q) = z_0.$$

Ist dann  $\text{rang } Df(p) = k$ , so gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  mit  $\text{grad } \varphi(p) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{grad } f_i(p)$ .

BEWEIS: Nach Verkleinerung von  $\Omega$  ist  $\text{rang } Df = k$  auf ganz  $\Omega$ , und  $M = f^{-1}(\{z_0\})$  ist  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit  $m = n - k$ , vgl. Satz 24.2. Ist  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma'(0) = v$ , so hat  $\varphi \circ \gamma$  in  $t = 0$  ein lokales Minimum und folglich

$$0 = \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t))|_{t=0} = \langle \text{grad } \varphi(p), v \rangle, \quad \text{also} \quad \text{grad } \varphi(p) \in (T_p M)^\perp.$$

Analog folgt  $\text{grad } f_i(p) \in (T_p M)^\perp$ , denn die  $f_i$  sind auf  $M$  konstant. Wir behaupten, dass die  $\text{grad } f_i(p)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , den Raum  $(T_p M)^\perp$  erzeugen. Nach Folgerung 24.1 hat  $(T_p M)^\perp$  die Dimension  $k$ . Nach Voraussetzung ist aber  $\text{rang } Df(p) = k$ , das heißt der von den Zeilen aufgespannte Raum hat Dimension  $k$ . Dies zeigt unsere Behauptung, und der Satz ist bewiesen. □

**Beispiel 24.6** Für  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch betrachten wir das Minimierungsproblem

$$\langle Bx, x \rangle \longrightarrow \min. \quad \text{unter Nebenbedingung } |x|^2 = 1.$$

Wir setzen  $\varphi(x) = \langle Bx, x \rangle$  und  $f(x) = |x|^2$ . Da  $f^{-1}\{1\} = \mathbb{S}^{n-1}$  kompakt ist und  $\varphi(x)$  stetig, wird das Infimum in einem  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  angenommen. Mit Satz 24.3 gibt es ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$\text{grad } \varphi(v) = \lambda \text{ grad } f(v), \quad \text{also } Bv = \lambda v.$$

Somit hat jede symmetrische Matrix  $B$  mindestens einen Eigenvektor. Dies wurde in Satz 20.3 schon mit einem direkten Argument gezeigt.

Wir haben die Sätze über inverse und implizite Funktionen im Endlichdimensionalen formuliert, um das Wesentliche ohne zuviel Abstraktion darzustellen. An der Verallgemeinerung auf Abbildungen zwischen Banachräumen besteht aber großes Interesse: in den Anwendungen ist die Gleichung  $f(x) = y$  zum Beispiel eine nichtlineare Differentialgleichung, die durch eine gesuchte Funktion  $x$  in einem geeigneten Funktionenraum  $X$  gelöst werden soll. Eine Inspektion des Beweises des Umkehrsatzes ergibt, dass die Konstruktion der inversen Abbildung einschließlich ihrer Differenzierbarkeit ohne Änderungen auch dann richtig ist, wenn  $f$  eine offene Teilmenge des Banachraums  $X$  in den Banachraum  $Y$  abbildet. Allerdings muss der Begriff der linearen Abbildung wie folgt ergänzt werden:

$$L(X, Y) = \{A : X \rightarrow Y \mid A \text{ linear}, \|A\| < \infty\} \quad \text{mit } \|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

$\|A\|$  heißt Operatornorm von  $A$ , eine lineare Abbildung mit  $\|A\| < \infty$  wird auch als beschränkter Operator bezeichnet. Es ist leicht zu sehen, dass die Bedingung  $\|A\| < \infty$  äquivalent zur Stetigkeit von  $A$  ist. Im Fall  $X = \mathbb{R}^n$  ist automatisch  $\|A\| < \infty$ , siehe Beispiel 7.10 in Analysis I, für  $\dim X = \infty$  muss das extra verlangt werden. Zum Beispiel wird in der Definition der Differenzierbarkeit  $Df(x_0) \in L(X, Y)$  gefordert. Von den Koordinaten des  $\mathbb{R}^n$  wurde beim Beweis des Umkehrsatzes nur explizit Gebrauch gemacht, um die höhere Differenzierbarkeit der Inversen zu etablieren. Hier gibt es aber als Alternative die Neumannsche Reihe, das heißt die geometrische Reihe

$$(\text{Id} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad \text{für } A \in L(X, X) \text{ mit } \|A\| < 1.$$

Zusammenfassend gelten Versionen der Sätze über inverse und implizite Funktionen auch für Abbildungen zwischen Banachräumen.

## 25 Das Anfangswertproblem

Aus Zeitgründen müssen wir uns hier auf einen zentralen Aspekt aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen beschränken, nämlich die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertaufgaben. Als Einstieg betrachten wir das Problem, die zeitliche Entwicklung einer Population (Bakterien, Bevölkerung, Kontostand, Atome, ...) vorherzusagen oder rückwärtig zu bestimmen. Wir interessieren uns also für die Größe  $x(t)$  der Population innerhalb eines gewissen Zeitintervalls  $I$ . Dabei ist zur Zeit  $t_0 \in I$  ein Wert  $x(t_0) = x_0$  gegeben. Wir sprechen von einem Anfangswertproblem, auch wenn  $t_0$  nicht der linke Endpunkt von  $I$  ist. Je nach Kontext sind viele verschiedene Wachstumsgesetze denkbar:

Beim natürlichen Wachstum (Kontostand, radioaktiver Zerfall) ist die Wachstums- oder Zerfallsgeschwindigkeit proportional zur vorhandenen Menge, mit fester Zuwachs- bzw. Zerfallsrate  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$x' = \alpha x$$

Die Funktion  $x(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$  ist die eindeutige Lösung zum Anfangswert  $x(t_0) = x_0$ . Denn für eine beliebige Lösung  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung gilt

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t} x(t)) = e^{-\alpha t} (x'(t) - \alpha x(t)) = 0.$$

Es folgt  $x(t) = c e^{\alpha t}$  für ein  $c \in \mathbb{R}$ , und mit der Anfangbedingung ergibt sich die Lösungsformel. Eine Variante ist das sogenannte logistische Wachstum

$$x' = (\alpha - \beta x)x = \alpha x - \beta x^2 \quad \text{mit } \alpha, \beta > 0.$$

Als Motivation für den Zusatzterm  $-\beta x$  kann das Beispiel einer Schafherde erhalten, für die nur eine feste Weidefläche zur Verfügung steht. Ab einem gewissen Schwellenwert sollte die Zahl der Tiere wieder abnehmen. Im Fall  $x_0 = x(t_0) > 0$  ist eine Lösung für  $t \geq t_0$  durch folgende Formel gegeben:

$$\frac{1}{x(t)} = \frac{\beta}{\alpha} + \left( \frac{1}{x_0} - \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Für  $t \rightarrow \infty$  konvergiert diese Lösung gegen  $\alpha/\beta$ , es gibt also ein Gleichgewicht. Das sogenannte Räuber-Beute Modell von Volterra und Lotka betrachtet zwei Populationen  $x(t)$  und  $y(t)$ , zum Beispiel Gänse und Füchse. Bei zuviel Füchsen wird die Vermehrungsrate der Gänse negativ, bei zuwenig Gänsen ist die Vermehrungsrate der Füchse negativ ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sind positive Konstanten):

$$\begin{aligned} x' &= (\alpha - \beta y)x \\ y' &= (-\gamma + \delta x)y. \end{aligned}$$

Es handelt sich um zwei gekoppelte Gleichungen, deren Lösung nicht offensichtlich ist. Soll das Modell außerdem die jahreszeitliche Änderung der Futtersituation berücksichtigen, so müssen die Koeffizienten durch zeitabhängige Funktionen ersetzt werden. Allgemein interessieren wir uns für folgende Situation.

**Definition 25.1** Sei  $G$  offen in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und  $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$ ,  $f = f(t, x)$ . Eine Funktion  $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  Intervall, heißt Lösung der Differentialgleichung  $x' = f(\cdot, x)$ , falls

$$(25.1) \quad x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{für alle } t \in I \quad (\text{insbesondere } (t, x(t)) \in G).$$

Gilt außerdem

$$(25.2) \quad x(t_0) = x_0 \text{ für gegebenes } (t_0, x_0) \in G,$$

so heißt  $x$  Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems.

Ist  $f$  nicht zeitabhängig, also  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f = f(x)$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , so heißt die Differentialgleichung autonom. In diesem Fall können wir  $x(t)$  als Bahn eines Fahrzeugs in  $\Omega$  ansehen, das zur Zeit  $t_0$  in  $x_0$  startet und durch Vorgabe der Momentangeschwindigkeit  $x'(t) = f(x(t))$  gesteuert wird. Im nichtautonomen Fall ist diese Steuerung zusätzlich zeitabhängig, es lässt sich aber in ein autonomes Problem umschreiben, indem die Zeit als zusätzliche Variable  $x_0(t)$  eingeführt wird:

$$\begin{aligned} x'_0(t) &= 1 & x_0(t_0) &= t_0 \\ x'(t) &= f(x_0(t), x(t)) & x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Allgemein stellen sich folgende Fragen:

1. Ist eine Lösung des Anfangswertproblems eindeutig bestimmt?
2. Existiert eine Lösung des Anfangswertproblems?
3. Wie hängt die Lösung vom Anfangswert  $x_0$  und dem Vektorfeld  $f$  ab?

In der Vorlesung werden aus Zeitgründen nur die ersten beiden Fragen befriedigend beantwortet, wobei wir mit der Eindeutigkeit beginnen.

**Beispiel 25.1** Sei  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und  $f(t, x) = 2\sqrt{|x|}$ . Dann hat das Anfangswertproblem

$$x' = f(\cdot, x) \quad x(0) = 0$$

unendlich viele verschiedene Lösungen in  $C^1(\mathbb{R})$ , und zwar für  $-\infty \leq \alpha \leq 0 \leq \beta \leq \infty$

$$x_{\alpha, \beta}(t) = \begin{cases} -(t - \alpha)^2 & \text{für } t < \alpha \\ 0 & \text{für } \alpha \leq t \leq \beta \\ (t - \beta)^2 & \text{für } t > \beta. \end{cases}$$

Für die Eindeutigkeit ist die Stetigkeit des Vektorfeldes  $f$  demnach nicht ausreichend.

**Satz 25.1 (Eindeutigkeit)** Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen, und  $f \in C^0(G)$  mit  $D_x f \in C^0(G)$ . Ist  $I$  offenes Intervall mit  $t_0 \in I$ , so hat das Anfangswertproblem

$$x' = f(\cdot, x), \quad x(t_0) = x_0$$

höchstens eine Lösung  $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ .

Im Beweis wird benutzt, dass die Funktion  $f(t, x)$  Lipschitzstetig bezüglich der Variablen  $x$  ist. Das wird durch die folgende Hilfsaussage garantiert.

**Lemma 25.1** Sei  $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$  mit  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen. Ist  $D_x f \in C^0(G, \mathbb{R}^{n \times n})$ , so gibt es zu  $U_\varepsilon(x_0, t_0) = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times B_\varepsilon(x_0) \subset\subset G$  eine Konstante  $L \in [0, \infty)$  mit

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2| \quad \text{für alle } (t, x_1), (t, x_2) \in U_\varepsilon(t_0, x_0).$$

BEWEIS: Da  $D_x f$  stetig ist und  $U_\varepsilon(t_0, x_0)$  kompakt in  $G$  liegt, gibt es  $L \in [0, \infty)$  mit  $|D_x f| \leq L$  auf  $U_\varepsilon(t_0, x_0)$ . Die Aussage folgt nun direkt aus dem Schrankensatz, Satz 19.3.  $\square$

BEWEIS: (von Satz 25.1) Seien  $x_1, x_2 \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  Lösungen des Anfangswertproblems. Wir zeigen erst  $x_1(t) = x_2(t)$  für  $|t - t_0| < \delta$ . Seien  $\varepsilon > 0$ ,  $L < \infty$  wie in Lemma 25.1. Wähle  $\delta > 0$  sodass  $(t, x_1(t)), (t, x_2(t)) \in U_\varepsilon(t_0, x_0)$  für  $|t - t_0| < \delta$ . Für  $u(t) = |x_1(t) - x_2(t)|^2$  folgt

$$\begin{aligned} |u'| &= 2|\langle x_1 - x_2, x_1' - x_2' \rangle| \\ &= 2|\langle x_1 - x_2, f(\cdot, x_1) - f(\cdot, x_2) \rangle| \\ &\leq 2|x_1 - x_2| |f(\cdot, x_1) - f(\cdot, x_2)| \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq 2Lu. \end{aligned}$$

Damit gelten für  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  die Ungleichungen

$$\frac{d}{dt}(e^{-2Lt}u(t)) \leq 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}(e^{2Lt}u(t)) \geq 0.$$

Durch Integration ergibt sich die Abschätzung  $u(t) \leq u(t_0) e^{2L|t-t_0|}$ , das heißt

$$(25.3) \quad |x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)| e^{L|t-t_0|} \quad \text{auf } (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Mit  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$  folgt  $x_1(t) = x_2(t)$  für alle  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ . Angenommen es ist

$$M = \{t > t_0 : x_1(t) \neq x_2(t)\} \neq \emptyset.$$

Dann ist  $t^* = \inf M > t_0$ , und es folgt  $x_1(t^*) = x_2(t^*)$  wegen Stetigkeit mit  $t \nearrow t^*$ . Wie bewiesen gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $x_1 = x_2$  auf  $(t^* - \delta, t^* + \delta)$ , also  $\inf M \geq t^* + \delta$ , Widerspruch.  $\square$

Wir bemerken am Rande, dass die Lösung nach (25.3) lokal Lipschitzstetig vom Anfangswert abhängt. Nun aber zur Frage der Existenz. Das folgende Beispiel zeigt, dass wir im allgemeinen nur eine zeitlich lokale Lösung erwarten können.

**Beispiel 25.2** Betrachte  $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ,  $f(t, x) = x^2$ . Das zugehörige Anfangswertproblem

$$x' = x^2, \quad x(0) = 1$$

hat die Lösung  $x : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x(t) = 1/(1-t)$ . Die Lösung ist nach rechts nicht fortsetzbar, denn es gilt  $\lim_{t \nearrow 1} x(t) = \infty$ .

In Analysis I, Satz 13.2, wurde gezeigt, dass die Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen bei gleichmäßiger Konvergenz stetig ist. Die folgende Konsequenz ist für uns jetzt wichtig.

**Satz 25.2 (Vollständigkeit von  $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ )** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Dann ist  $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ , versehen mit der Supremumsnorm, ein Banachraum.

BEWEIS: Sei  $x_k \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$  eine Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm, das heißt zu  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $K \in \mathbb{R}$  mit  $\|x_k - x_l\|_I < \varepsilon$  für  $k, l > K$ . Es folgt für  $k, l > K$

$$|x_k(t) - x_l(t)| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in I.$$

Da  $\mathbb{R}^n$  vollständig ist, existiert  $x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t)$ . Mit  $l \rightarrow \infty$  folgt für  $k > K$

$$|x_k(t) - x(t)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \in I,$$

also  $\|x_k - x\|_I \leq \varepsilon$  für  $k > K$ . Somit konvergiert  $x_k$  gegen  $x$  bezüglich  $\|\cdot\|_I$ , und es folgt  $x \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$  nach Analysis I, Satz 13.2.  $\square$

Eine entscheidende Beobachtung zur Konstruktion der lokalen Lösung ist, dass das Anfangswertproblem als Integralgleichung geschrieben werden kann.

**Lemma 25.2** Sei  $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$ ,  $(t_0, x_0) \in G$ , und  $I$  offenes Intervall mit  $t_0 \in I$ . Für  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\{(t, x(t)) : t \in I\} \subset G$  sind äquivalent:

(a)  $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  ist Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{für alle } t \in I, \quad x(t_0) = x_0.$$

(b)  $x \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$  erfüllt die Gleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \text{für alle } t \in I.$$

BEWEIS: Aus (a) folgt (b) durch Integration von  $t_0$  bis  $t$ . In (b) ist die Funktion  $f(s, x(s))$  stetig. Aus dem Hauptsatz folgt  $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  und  $x'(t) = f(t, x(t))$ . Ausserdem ist auch  $x(t_0) = x_0$ , also gilt (a).  $\square$

**Satz 25.3 (Kurzzeitexistenzsatz von Picard-Lindelöf)** Sei  $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$ , mit  $D_x f \in C^0(G, \mathbb{R}^{n \times n})$ , und  $(t_0, x_0) \in G$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass das Anfangswertproblem

$$x' = f(\cdot, x) \quad \text{auf } I := [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \quad x(t_0) = x_0,$$

eine Lösung  $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  besitzt.

BEWEIS: Wir formulieren das Problem als Fixpunktgleichung. Zu  $(t_0, x_0) \in G$  seien  $\varepsilon > 0$  und  $L < \infty$  wie in Lemma 25.1 gewählt, und  $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  mit  $\delta \in (0, \varepsilon]$  zunächst beliebig. Betrachte im Banachraum  $X = C^0(I, \mathbb{R}^n)$  mit Norm  $\|\cdot\|_I$  die abgeschlossene Teilmenge  $A = \{x \in X : \|x - x_0\|_I \leq \varepsilon\}$ , sowie die Abbildung.

$$F : A \rightarrow X, \quad F[x](t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Nach Lemma 25.2 ist die Gleichung  $F[x] = x$  gleichbedeutend mit der Lösung des Anfangswertproblems. Die Existenz des Fixpunkts folgt mit Satz 23.1 von Banach, wenn wir zeigen:

(1)  $F(A) \subset A$  (Selbstabbildung)

(2)  $\|F(x) - F(y)\|_I \leq \frac{1}{2} \|x - y\|_I$  für alle  $x, y \in A$  (Kontraktion).

Da  $f$  stetig auf  $G$  ist und  $U_\varepsilon(t_0, x_0) \subset\subset G$ , gilt  $|f| \leq M$  auf  $U_\varepsilon(t_0, x_0)$ . Für  $x \in A$  folgt

$$|F[x](t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq M |t - t_0| \leq M\delta.$$

Weiter erhalten wir für  $x, y \in A$  aus der Lipschitzbedingung

$$\begin{aligned} |F[x](t) - F[y](t)| &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \right| \\ &\leq |t - t_0| \sup_{s \in I} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \\ &\leq L\delta \sup_{s \in I} |x(s) - y(s)|. \end{aligned}$$

Für  $\delta = \min(\varepsilon/M, 1/(2L))$  gelten die Bedingungen (1) und (2), der Satz ist bewiesen.  $\square$

Wir haben im Eindeutigkeits- und Existenzsatz verlangt, dass  $D_x f \in C^0(G, \mathbb{R}^{n \times n})$ ; dies erscheint leicht nachprüfbar. In den Beweisen wurde allerdings nur benutzt, dass  $f(t, x)$  bezüglich der Variablen  $x$  lokal eine Lipschitzbedingung erfüllt.

**Beispiel 25.3** Im Satz von Banach wird der Fixpunkt bekanntlich durch Iteration der Abbildung  $F$  mit einem geeigneten Startwert bestimmt. Wir wollen das für folgendes triviale Beispiel explizit durchrechnen:

$$x' = \alpha x, \quad x(0) = 1.$$

Hier ist  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $f(t, x) = \alpha x$  und  $t_0 = 0$ . Die Iterationsvorschrift lautet

$$F[x](t) = 1 + \int_0^t \alpha x(s) ds.$$

Wählen wir als Startfunktion  $x_0(t) \equiv 1$ , so sind die ersten Iterationsschritte

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + \int_0^t \alpha ds = 1 + \alpha t, \\ x_2(t) &= 1 + \int_0^t \alpha(1 + \alpha s) ds = 1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2}, \\ x_3(t) &= 1 + \int_0^t \alpha \left(1 + \alpha s + \frac{\alpha^2 s^2}{2}\right) ds = 1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \frac{\alpha^3 t^3}{6}. \end{aligned}$$

Durch Induktion sieht man ohne Mühe

$$x_k(t) = \sum_{j=0}^k \frac{(\alpha t)^j}{j!}.$$

Das Verfahren konvergiert für  $k \rightarrow \infty$  gegen die Lösung  $x(t) = e^{\alpha t}$ , lokal gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$ .

Natürlich ist die Kurzzeitexistenz nicht das Ende der Fahnenstange, es stellt sich unmittelbar die Frage nach einer globalen Lösung. Zunächst gibt es immer eine eindeutige, maximale Lösung des Anfangswertproblems. Mit maximal ist gemeint, dass das Lösungsintervall weder nach rechts noch nach links vergrößert werden kann. Setze

$$\begin{aligned} t^+ &= \sup\{t \geq t_0 : \exists \text{ Lösung des AWP auf } [t_0, t)\}, \\ t^- &= \inf\{t \leq t_0 : \exists \text{ Lösung des AWP auf } (t, t_0]\}. \end{aligned}$$

Wegen der Kurzzeitexistenz, Satz 25.3, haben wir

$$-\infty \leq t^- < t_0 < t^+ \leq \infty.$$

Wir definieren wie folgt eine Lösung  $x \in C^1((t^-, t^+), \mathbb{R}^n)$ : zu  $t \in (t_0, t^+)$  gibt es eine Lösung  $x^t(s)$  auf  $[t_0, t)$ , wir setzen  $x(s) = x^t(s)$  auf  $[t_0, t)$ . Für  $t_* > t$  sei  $x^{t_*}(s)$  eine Lösung auf  $[t_0, t_*)$ . Wegen Eindeutigkeit, Satz 25.1, gilt dann  $x^{t_*}(s) = x^t(s)$  auf  $[t_0, t)$ . Damit ist  $x(s)$  eine wohldefinierte Lösung auf ganz  $[t_0, t^+)$ . Entsprechend wird  $x(s)$  auf  $(t^-, t_0]$  definiert. Nach Definition von  $t^\pm$  ist  $x(s)$  die eindeutige, maximale Lösung. Die Zeiten  $t^\pm$  werden als vorwärts bzw. rückwärts Lebensdauer der Lösung bezeichnet (Englisch: *forward/backward lifespan*).

Wir betrachten nun Anfangswertprobleme auf einem  $(t, x)$ -Zylinder  $G = (\alpha, \beta) \times D$ , und stellen die Frage: was muss passieren, wenn die Lösung vorzeitig den Geist aufgibt, also wenn  $t^+ < \beta$  bzw.  $t^- > \alpha$ ?

**Satz 25.4 (Lebensdauer)** Sei  $f : (\alpha, \beta) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $f, D_x f$  stetig, wobei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $-\infty \leq \alpha < t_0 < \beta \leq \infty$ . Es sei  $x : (t^-, t^+) \rightarrow D$  die maximale Lösung von

$$x' = f(\cdot, x), \quad x(t_0) = x_0 \in D.$$

Ist dann  $t^+ < \beta$ , so verlässt  $x(t)$  für  $t \nearrow t^+$  jedes Kompaktum: für jedes  $K \subset D$  kompakt gilt  $x(t) \notin K$  für  $t$  hinreichend nahe bei  $t^+$ . Entsprechendes gilt im Fall  $t^- > \alpha$ .

*Bemerkung.* Im Fall  $D = \mathbb{R}^n$  besagt der Satz

$$t^+ < \beta \Rightarrow \lim_{t \nearrow t^+} |x(t)| = \infty \quad \text{bzw.} \quad t^- > \alpha \Rightarrow \lim_{t \searrow t^-} |x(t)| = \infty.$$

BEWEIS: Sei  $t^+ < \beta$  und  $K \subset D$  kompakt. Angenommen es gibt ein  $\tau < t^+$  mit  $x(t) \in K$  für alle  $t \in (\tau, t^+)$ . Da  $f$  stetig, ist  $M = \sup\{|f(t, x)| : t \in [t_0, t^+], x \in K\} < \infty$  und es folgt

$$|x(t_2) - x(t_1)| = \int_{t_1}^{t_2} |f(t, x(t))| dt \leq M |t_2 - t_1| \quad \text{für alle } t_{1,2} \in [0, t^+).$$

Somit existiert  $x^+ = \lim_{t \nearrow t^+} x(t) \in K$ . Nach Satz 25.3 gibt es nun auf einem Intervall  $I = (t^+ - \tau, t^+ + \tau)$  eine Lösung  $y$  des Anfangswertproblems

$$y' = f(\cdot, y) \text{ auf } I, \quad y(t^+) = x^+.$$

Nach dem Eindeutigkeitsatz stimmen  $x$  und  $y$  links von  $t^+$  überein, also ergibt Zusammen setzen eine Lösung  $\tilde{x}$  der Differentialgleichung auf  $[t_0, t^+ + \tau)$  mit  $\tilde{x}(t_0) = x_0$ , im Widerspruch zur Maximalität von  $t^+$ .

Der Satz ist damit nicht ganz gezeigt, denn die obige indirekte Annahme schließt nicht ein oszillierendes Verhalten aus, bei dem die Lösung für  $t \nearrow t^+$  immer wieder nach  $K$  zurückkommt. Aber angenommen es gibt eine Folge  $t_k \nearrow t^+$  mit  $x(t_k) \in K$ . Aus Kompaktheitsgründen gilt  $\tilde{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, K) \leq \varrho\} \subset D$  für  $\varrho > 0$  klein, sowie  $\tilde{M} = \sup\{|f(t, x)| : t \in [t_0, t^+], x \in \tilde{K}\} < \infty$ . Wie schon gezeigt ist

$$\tilde{t}_k = \sup\{t \geq t_k : x([t_k, t]) \subset \tilde{K}\} < t^+,$$

und es folgt

$$0 < \varrho \leq |x(\tilde{t}_k) - x(t_k)| = \left| \int_{t_k}^{\tilde{t}_k} f(t, x(t)) dt \right| \leq \tilde{M}(\tilde{t}_k - t_k).$$

Für  $t_k$  hinreichend nahe bei  $t^+$  ist dies ein Widerspruch, und der Beweis ist komplett.  $\square$

Um mit diesem Satz ein globales Existenzresultat zu zeigen, brauchen wir eine Abschätzung der Lösung. Das folgende Argument beruht wieder auf einem Vergleich mit der Exponentialfunktion.

**Lemma 25.3 (Gronwall)** Sei  $u \in C^0([t_0, t_1])$ , und es gelte

$$u(t) \leq B(t) + \int_{t_0}^t a(s)u(s) ds \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_1],$$

wobei  $a \in C^0([t_0, t_1])$ ,  $a \geq 0$ , und  $B \in C^1([t_0, t_1])$ . Dann folgt mit  $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$

$$u(t) \leq e^{A(t)} \left( B(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} B'(s) ds \right) \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_1].$$

BEWEIS: Wir setzen  $g(t) = \int_{t_0}^t a(s)u(s) ds$ , also  $u(t) \leq B(t) + g(t)$ , und berechnen

$$\frac{d}{dt}(e^{-A}g) = e^{-A}a(u - g) \leq e^{-A}aB = -\frac{d}{dt}(e^{-A}B) + e^{-A}B'.$$

Integration von  $t_0$  bis  $t$  liefert wegen  $g(t_0) = 0$  und  $A(t_0) = 0$

$$e^{-A(t)}g(t) \leq B(t_0) - e^{-A(t)}B(t) + \int_{t_0}^t e^{-A(s)}B'(s) ds.$$

Multiplikation mit  $e^{A(t)}$  und Einsetzen in  $u(t) \leq B(t) + g(t)$  ergibt die Ungleichung.  $\square$

**Satz 25.5 (Langzeitexistenz bei linearem Wachstum)** Sei  $f : (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $f, D_x f$  stetig und  $-\infty \leq \alpha < t_0 < \beta \leq \infty$ . Es gebe  $a, b \in C^0((\alpha, \beta))$  mit  $a \geq 0$ , so dass gilt:

$$|f(t, x)| \leq a(t)|x| + b(t) \quad \text{für alle } t \in (\alpha, \beta), x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist das Anfangswertproblem  $x' = f(\cdot, x)$ ,  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ , auf ganz  $(\alpha, \beta)$  lösbar.

BEWEIS: Für  $t \in [t_0, t^+)$  gilt die Abschätzung

$$|x(t)| \leq |x_0| + \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \leq |x_0| + \int_{t_0}^t (a(s)|x(s)| + b(s)) ds,$$

das heißt

$$|x(t)| \leq B(t) + \int_{t_0}^t a(s)|x(s)| ds \quad \text{mit } B(t) = |x_0| + \int_{t_0}^t b(s) ds.$$

Mit dem Lemma von Gronwall bekommen wir die Abschätzung

$$(25.4) \quad |x(t)| \leq e^{A(t)} \left( |x_0| + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right) \quad \text{für } t \in [t_0, t^+), \text{ wobei } A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds.$$

Wäre nun  $t^+ < \beta$ , so folgt  $|x(t)| \rightarrow \infty$  mit  $t \nearrow t^+$  nach Satz 25.4, im Widerspruch zu (25.4). Um  $t^- = \alpha$  zu zeigen, kann man das Argument auf die transformierte Funktion  $\tilde{x}(t) = x(2t_0 - t)$ ,  $t \in [t_0, 2t_0 - t^-)$ , anwenden.  $\square$



## 26 Lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten hier das Anfangswertproblem

$$(26.1) \quad x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \text{ für } t \in I = (\alpha, \beta), \quad x(t_0) = x_0.$$

Dabei ist  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sowie  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Allerdings ist es nützlich, auch komplexwertige Koeffizienten und Lösungen zuzulassen. Durch Aufspaltung in Real- und Imaginärteil ist ein komplexes  $n \times n$  System äquivalent zu einem reellen  $(2n) \times (2n)$  System, das heißt unsere Existenz- und Eindeigkeitstheorie ist voll anwendbar.

Wir betrachten erst das homogene Problem, also  $b(t) \equiv 0$ . Der Fall  $n = 1$  kann die Lösung leicht berechnet werden: ist  $x_0 = 0$ , so ist  $x(t)$  die Nullfunktion. Ist  $x_0 > 0$ , so folgt  $x(t) > 0$  für alle  $t \in I$  und

$$\frac{d}{dt} \log x(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} = A(t), \quad \text{also} \quad x(t) = x_0 \exp \int_{t_0}^t A(s) ds.$$

Im Fall  $x_0 < 0$  ergibt sich dieselbe Formel. Für Systeme, also  $n \geq 2$ , gibt es kein entsprechendes Verfahren, das die Lösung explizit angibt.

**Satz 26.1 (Anfangswertisomorphismus)** Sei  $A \in C^0(I, \mathbb{K}^{n \times n})$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Dann ist die Menge  $L_A = \{x \in C^1(I, \mathbb{K}^n) : x' = Ax \text{ auf } I\}$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, genauer ist für jedes  $t_0 \in I$  die Abbildung

$$\delta_{t_0} : L_A \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \delta_{t_0}(x) = x(t_0)$$

ein Vektorraumisomorphismus.

BEWEIS: Mit  $x, y \in L_A$  ist auch  $\lambda x + \mu y \in L_A$  für  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , denn

$$(\lambda x + \mu y)' = \lambda x' + \mu y' = \lambda Ax + \mu Ay = A(\lambda x + \mu y).$$

Also ist  $L_A$  ein Untervektorraum von  $C^1(I, \mathbb{K}^n)$ , und die Abbildung  $\delta_{t_0} : L_A \rightarrow \mathbb{K}^n$  ist wohldefiniert und linear. Da  $|A(t)x| \leq |A(t)||x|$ , gibt es nach Satz 25.5 zu jedem  $x_0 \in \mathbb{K}^n$  eine Lösung von  $x' = Ax$  auf ganz  $I$  mit Anfangswert  $x(t_0) = x_0$ , das heißt die Abbildung  $\delta_{t_0}$  ist surjektiv. Die Eindeutigkeit, Satz 25.1, besagt dass  $\delta_{t_0}$  auch injektiv ist.  $\square$

Eine Basis von  $L_A$  bezeichnet man als Fundamentalsystem der Gleichung  $x' = Ax$ . Explizit erhält man ein solches Fundamentalsystem, indem man die Gleichung zu linear unabhängigen Anfangsdaten löst, etwa  $x_j(t_0) = e_j$ , wobei  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasis ist.

Für  $n$  beliebige Lösungen  $x_j : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  der Differentialgleichung impliziert der Satz folgende Alternative: entweder bilden die Vektoren  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  eine Basis des  $\mathbb{K}^n$  für jedes  $t \in I$ , oder es gibt Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , nicht alle Null, mit  $\lambda_1 x_1(t) + \dots + \lambda_n x_n(t) = 0$  für alle  $t \in I$ . Wir können  $n$  Funktionen  $x_1, \dots, x_n : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  zu einer matrixwertigen Funktion  $X : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  zusammenfassen, so dass  $x_j$  die  $j$ -te Spalte von  $X$  ist. Es gilt dann

$$x'_j = Ax_j \text{ für } j = 1, \dots, n \quad \Leftrightarrow \quad X' = AX.$$

Rechts steht die Matrixmultiplikation. Die Äquivalenz folgt daraus, dass die Ableitung von  $X$  spaltenweise berechnet werden kann, und dass die  $j$ -te Spalte von  $AX$  gleich  $Ax_j$  ist. Die Tatsache, dass die Vektoren  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  für Lösungen des Systems  $x' = Ax$  entweder für alle  $t \in I$  oder für kein  $t \in I$  linear abhängig sind, ergibt sich alternativ aus folgender Formel.

**Satz 26.2 (Formel von Liouville)** Sei  $X \in C^1(I, \mathbb{K}^{n \times n})$  Lösung von  $X' = AX$  auf  $I$ , wobei  $A \in C^0(I, \mathbb{K}^{n \times n})$ . Dann gilt für beliebiges  $t_0 \in I$

$$\det X(t) = \det X(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds\right) \quad \text{für alle } t \in I.$$

BEWEIS: Ist  $\det X(t_0) = 0$ , so gilt  $\det X(t) = 0$  für alle  $t \in I$  nach Satz 26.1, und die Formel trifft zu. Andernfalls ist  $\det X(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ , und es gilt die allgemeine Formel

$$(\det X)'(t) = \det X(t) \cdot \operatorname{tr}(X(t)^{-1}X'(t)).$$

Setzen wir  $X' = A(t)X(t)$  ein und beachten  $\operatorname{tr}(X^{-1}AX) = \operatorname{tr}(XX^{-1}A) = \operatorname{tr}(A)$ , so folgt

$$(\det X)'(t) = \det X(t) \cdot \operatorname{tr}(A(t)).$$

Die Behauptung folgt aus der Lösungsformel für  $n = 1$ . □

Wir kommen nun zum Anfangswertproblem für die inhomogene Gleichung

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t).$$

Sind  $x_1, x_2$  zwei Lösungen, so ist  $x(t) = x_2(t) - x_1(t)$  eine Lösung der homogenen Gleichung  $x' = Ax$ , das heißt es gilt  $x_2 \in x_1 + L_A$ , ähnlich wie bei linearen Gleichungssystemen. Wir machen zur Lösung der inhomogenen Gleichung den Ansatz

$$x(t) = X(t)y(t), \quad \text{wobei } X(t) \text{ Fundamentalsystem mit } X(t_0) = E_n.$$

Ein solches Fundamentalsystem gibt es nach Satz 26.1. Wir berechnen

$$\begin{aligned} x'(t) &= X'(t)y(t) + X(t)y'(t) = A(t)X(t)y(t) + X(t)y'(t) = A(t)x(t) + X(t)y'(t), \\ x(t_0) &= X(t_0)y(t_0) = y(t_0). \end{aligned}$$

Geben wir noch den Anfangswert  $x(t_0) = x_0$  vor, so ergibt sich  $y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(s)^{-1}b(s) ds$ . Damit ist gezeigt:

**Satz 26.3 (Variation der Konstanten)** Betrachte für  $x \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$  das Problem

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \quad \text{auf } I, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{K}^n,$$

wobei  $A \in C^0(I, \mathbb{K}^{n \times n})$  und  $b \in C^0(I, \mathbb{K}^n)$ . Sei  $X \in C^1(I, \mathbb{K}^{n \times n})$  ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung mit  $X(t_0) = E_n$ . Dann lautet die eindeutige Lösung

$$x(t) = X(t) \left( x_0 + \int_{t_0}^t X(s)^{-1}b(s) ds \right).$$

Wir spezialisieren nun auf lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten. Ein Fundamentalsystem kann dann mit der Exponentialabbildung für Matrizen hingeschrieben werden. Diese ist durch die Exponentialreihe definiert:

$$\exp : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, \quad \exp(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}.$$

Die Reihe konvergiert für alle  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ , genauer gilt für  $|A| \leq R$  die Abschätzung

$$\left| \sum_{j=k}^m \frac{A^j}{j!} \right| \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{|A|^j}{j!} \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{R^j}{j!} < \varepsilon \quad \text{für } k \geq K(R, \varepsilon).$$

Also ist die Konvergenz für  $|A| \leq R$  gleichmäßig, und  $\exp$  ist stetig auf  $\mathbb{K}^{n \times n}$ .

**Satz 26.4 (Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten)** Für  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  ist

$$X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, X(t) = \exp(tA),$$

die Lösung des Anfangswertproblems  $X' = AX$ ,  $X(0) = E_n$ . Die Spaltenvektoren  $x_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , sind ein Fundamentalsystem für  $x' = Ax$  mit Anfangswerten  $x_j(0) = e_j$ .

BEWEIS: Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gegeben. Wir berechnen durch gliedweise Differentiation

$$X'(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1} A^j}{(j-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j A^{j+1}}{j!} = A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j A^j}{j!} = AX(t).$$

Die Ableitung war erlaubt, die differenzierte Reihe konvergiert gleichmäßig für  $|t| \leq T$ :

$$\left| \sum_{j=k}^m \frac{t^j A^{j+1}}{j!} \right| \leq |A| \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(|t| |A|)^j}{j!} \leq |A| \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(T|A|)^j}{j!} < \varepsilon \quad \text{für } k \geq K(|A|, T, \varepsilon).$$

□

**Folgerung 26.1** Die Matrix-Exponentialabbildung hat folgende Eigenschaften:

- (a)  $\exp : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{K})$  und  $\exp(0) = E_n$ .
- (b)  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$ .
- (c)  $\exp(SAS^{-1}) = S \exp(A) S^{-1}$  für alle  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ,  $S \in \text{Gl}_n(\mathbb{K})$ .
- (d)  $\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$ , falls  $[A, B] = AB - BA = 0$ .

BEWEIS: Es ist  $\exp(0) = E_n$  nach Definition. Nach Satz 26.4 und Satz 26.1 ist  $\exp(A) = \exp(tA)|_{t=1}$  invertierbar. Gleichung (b) ist Satz 26.2, angewandt auf  $X(t) = \exp(tA)$ . Für (c) argumentieren wir mit dem Eindeutigkeitsatz: die Funktionen  $t \mapsto \exp(tSAS^{-1})$  sowie  $t \mapsto S \exp(tA) S^{-1}$  lösen beide die Gleichung  $X' = (SAS^{-1})X$  zum Anfangswert  $X(0) = E_n$ . Also sind sie gleich, für  $t = 1$  folgt (c). Bei (d) gehen wir ähnlich vor, aber in zwei Schritten: zunächst sind sowohl  $t \mapsto \exp(tA)B$  als auch  $t \mapsto B \exp(tA)$  Lösungen des Anfangswertproblems  $X' = AX$  mit  $X(0) = B$ , wobei für die zweite Funktion  $[A, B] = 0$  benutzt wird:

$$\frac{d}{dt}(B \exp(tA)) = BA \exp(tA) = A(B \exp(tA)).$$

Das zeigt  $\exp(A)B = B \exp(A)$ . Weiter gilt für  $X(t) = \exp(tA) \exp(tB)$

$$\begin{aligned} X'(t) &= A \exp(tA) \exp(tB) + \exp(tA) B \exp(tB) \\ &= (A+B) \exp(tA) \exp(tB) \\ &= (A+B)X(t). \end{aligned}$$

Dies zeigt  $X(t) = \exp t(A+B)$ , insbesondere  $\exp(A) \exp(B) = \exp(A+B)$ . □

Die Eigenschaften (c) und (d) können auch direkt aus der Reihendarstellung hergeleitet werden. Dabei muss  $\exp(A) \exp(B)$  mit dem Cauchyprodukt berechnet werden, vgl. Analysis I, Satz 6.7, wobei die Voraussetzung  $[A, B] = 0$  wesentlich ist.

Betrachte nun den Fall, wenn  $A$  über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  diagonalisierbar ist, das heißt es gibt eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Die Funktionen  $x_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$  bilden dann ein Fundamentalsystem, denn es gilt

$$x_j'(t) = \lambda_j e^{\lambda_j t} v_j = e^{\lambda_j t} A v_j = A x_j(t).$$

In der Eigenvektorbasis entkoppelt das System also in  $n$  skalare Gleichungen, deren Lösungen durch Exponentialfunktionen gegeben sind. Leider ist nicht jede Matrix diagonalisierbar. In der Linearen Algebra wird gezeigt, dass es über  $\mathbb{C}$  jedenfalls immer eine Basis gibt, so dass die zugehörige Matrix Jordansche Normalform hat, das heißt sie besteht aus Blöcken der Form

$$J_m(\lambda) = \lambda E_m + N_m \quad \text{mit } N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $N_m^{m+1} = 0$ , deshalb sind die Potenzen und die Exponentialreihe der  $J_m(\lambda)$  leicht berechenbar. Wir wollen das aber nicht allgemein durchführen, sondern betrachten ein klassisches Beispiel.

Die Auslenkung eines schwingungsfähigen Systems (Oszillators) mit Eigenfrequenz  $\omega_0 > 0$  und Reibungskoeffizient  $\beta \geq 0$  wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0.$$

Wir schreiben die Gleichung äquivalent in ein System erster Ordnung um:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix  $A$  ist  $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2$ . Wir betrachten erst den Fall  $\beta \neq \omega_0$ . Die Matrix  $A$  hat dann zwei verschiedene, eventuell komplexe, Eigenwerte  $\lambda^\pm$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $v^\pm$ , und zwar

$$\lambda^\pm = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{C}, \quad v^\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^\pm \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$A = S \begin{pmatrix} \lambda^+ & 0 \\ 0 & \lambda^- \end{pmatrix} S^{-1} \quad \text{mit } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda^+ & \lambda^- \end{pmatrix}.$$

Mit Folgerung 26.1(c) ergibt sich

$$\exp(tA) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda^+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda^- t} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Für das System erster Ordnung haben wir also das Fundamentalsystem

$$\exp(tA) v^\pm = e^{\lambda^\pm t} v^\pm = e^{\lambda^\pm t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^\pm \end{pmatrix}.$$

Im Fall  $\beta > \omega_0$  erhalten wir zwei Lösungen, die exponentiell und monoton fallen (Kriechfall):

$$x^\pm(t) = e^{-\beta^\pm t} \quad \text{mit } \beta^\pm = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \in (0, 2\beta).$$

Im Fall  $\beta < \omega_0$  bekommen wir die komplexen Lösungen

$$x^\pm(t) = e^{-\beta t} e^{\pm i \omega t} \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \in (0, \omega_0].$$

Durch Kombination erhalten wir die reellen Lösungen

$$x_1(t) = e^{-\beta t} \cos \omega t \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{-\beta t} \sin \omega t.$$

Auch diese fallen exponentiell, aber sie oszillieren mit Periode  $2\pi/\omega$  (Schwingfall).

Es bleibt der Fall  $\omega_0 = \beta$ . Das charakteristische Polynom hat dann nur die Nullstelle  $\lambda = -\beta$ , und  $A$  ist nicht diagonalisierbar, sonst wäre  $A$  ein Vielfaches der Einheitsmatrix. Wir wählen die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit hat  $A$  Jordansche Normalform, es gilt

$$A = S \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} S^{-1} \quad \text{mit } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen mit der Binomischen Formel

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N^2 = 0 \Rightarrow (\lambda E_2 + N)^k = \lambda^k E_2 + k \lambda^{k-1} N.$$

Also erhalten wir

$$\exp(tA) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} S^{-1},$$

und das Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} \exp(tA)v_1 &= e^{\lambda t} v_1 = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \\ \exp(tA)v_2 &= t e^{\lambda t} v_1 + e^{\lambda t} v_2 = t e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} + e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Gleichung zweiter Ordnung bekommen wir, mit  $\lambda = -\beta$ ,

$$x_1(t) = e^{-\beta t} \quad \text{und} \quad x_2(t) = t e^{-\beta t}.$$

Man spricht vom aperiodischen Grenzfall. Die zweite Lösung fällt nicht genau wie  $e^{-\beta t}$ , sondern es kommt ein Polynom (hier linear) als Faktor hinzu.



## 27 Separation der Variablen

In diesem kurzen Kapitel geht es einen speziellen Typ einer skalaren Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösung leicht explizit bestimmt werden kann. Das Lösungsverfahren ist Standard und wird oft benutzt.

**Satz 27.1 (Separation der Variablen)** Seien  $f(t) \in C^0(I)$ ,  $g(x) \in C^0(J)$ , wobei  $I, J$  offene Intervalle und  $g(x) \neq 0$ . Wir betrachten für  $(t_0, x_0) \in I \times J$

$$(27.1) \quad x'(t) = \frac{f(t)}{g(x(t))} \text{ für } t \in I, x(t_0) = x_0 \quad \text{mit } (t_0, x_0) \in I \times J.$$

Seien  $F \in C^1(I)$ ,  $G \in C^1(J)$  die Stammfunktionen von  $f, g$  mit  $F(t_0) = G(x_0) = 0$ . Gilt  $F(I) \subset G(J)$ , so ist die  $x(t) = G^{-1}(F(t))$  Lösung des Anfangswertproblems.

*Bemerkung.*  $G(J)$  ist offen nach Analysis 1, Satz 8.2. Da  $F(t_0) \in G(J)$ , ist die Bedingung  $F(I) \subset G(J)$  erfüllt, wenn  $I$  hinreichend klein gewählt wird.

BEWEIS: Es gilt  $x = G^{-1} \circ F \in C^1(I)$ , und  $x(t_0) = G^{-1}(0) = x_0$ . Weiter für  $t \in I$

$$x'(t) = \frac{1}{G'(G^{-1} \circ F(t))} F'(t) = \frac{1}{g(x(t))} f(t).$$

□

Es ist üblich und sinnvoll, die Methode der Separation der Variablen zunächst sorglos anzuwenden. Der Gültigkeitsbereich der Lösung kann dann a posteriori bestimmt werden, auch kann geprüft werden, ob der Ansatz alle möglichen Lösungen liefert. Für die Anwendung ist folgendes Kochrezept hilfreich:

- (1) Separation der Variablen: schreibe die Gleichung in der Form

$$g(x) dx = f(t) dt.$$

- (2) Integriere links von  $x_0$  bis  $x$ , rechts von  $t_0$  bis  $t$ :

$$G(x) = \int_{x_0}^x g(y) dy = \int_{t_0}^t f(s) ds = F(t).$$

- (3) Löse nach  $x = x(t)$  auf.

**Beispiel 27.1** Betrachte das Anfangswertproblem

$$x'(t) = x(t)^2, \quad x(0) = x_0 > 0.$$

Wir schreiben  $x^{-2} dx = dt$ . Integration von  $x_0$  bis  $x$  bzw. von  $t = 0$  bis  $t$  ergibt

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = t.$$

Auflösen nach  $x$  ergibt

$$x(t) = \left( \frac{1}{x_0} - t \right)^{-1}.$$

Das maximale Existenzintervall ist  $(-\infty, \frac{1}{x_0})$ . Im Fall  $x_0 < 0$  erhalten wir die gleiche Formel, das maximale Intervall ist dann  $(\frac{1}{x_0}, \infty)$ . Im Fall  $x_0 = 0$  kann die Lösung  $x(t) \equiv 0$  nicht mit der Methode der Separation gefunden werden.

Bei Euler-Lagrange Gleichungen spielen Erhaltungssätze eine zentrale Rolle.

**Satz 27.2 (Energieerhaltungssatz)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ ,  $f = f(x, v)$ , also unabhängig von  $t$ . Dann gilt für eine Lösung  $x \in C^2(I, \Omega)$  der Euler-Lagrange-Gleichungen der Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt} [\langle D_v f(x, x'), x' \rangle - f(x, x')] = 0.$$

BEWEIS: Wir berechnen in Koordinaten

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial v_j}(x, x') x'_j - f(x, x') \right] = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial v_j}(x, x') - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, x') \right)}_{=0} x'_j = 0$$

□

Bei eindimensionalen Variationsproblemen führt der Energieerhaltungssatz auf eine skalare Differentialgleichung erster Ordnung. Durch Separation der Variablen kann dann gegebenenfalls eine explizite Lösung der Euler-Lagrange Gleichung gefunden werden.

**Beispiel 27.2** Betrachte das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b \left( \frac{m}{2} |u'(t)|^2 - V(u(t)) \right) dt.$$

Dabei beschreibt  $u(t)$  die Bewegung eines Teilchens der Masse  $m > 0$  im Kraftfeld  $F(x) = -\text{grad } V(x)$ , siehe Beispiel 22.6. Wir berechnen für  $f(x, v) = \frac{m}{2} |v|^2 - V(x)$

$$\langle D_v f(x, x'), x' \rangle - f(x, x') = \langle m x', x' \rangle - \left( \frac{m}{2} |x'|^2 - V(x) \right) = \frac{m}{2} |x'|^2 + V(x).$$

Es folgt für Lösungskurven der Energieerhaltungssatz

$$\frac{m}{2} |x'|^2 + V(x) = E \quad (= \text{Konstante}).$$

**Beispiel 27.3 (Das Katenoid)** Wird der Graph einer Funktion  $u : I \rightarrow (0, \infty)$ ,  $u = u(x)$ , um die  $x$ -Achse rotiert, so hat die Rotationsfläche den Inhalt

$$\mathcal{A}(u) = 2\pi \int_I u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2} dx.$$

Sei  $u(x)$  eine Lösung der Euler-Lagrange Gleichung. Nach Satz 27.2 gilt dann

$$\frac{u u'}{\sqrt{1 + (u')^2}} u' - u \sqrt{1 + (u')^2} = -a \quad (= \text{Konstante}).$$

Der Einfachheit halber sei  $u'(0) = 0$  und  $u'(x) > 0$  für  $x > 0$ . Dann folgt  $u(0) = a$  und

$$\frac{du}{dx} = \left( \left( \frac{u}{a} \right)^2 - 1 \right)^{1/2}.$$

Jetzt integriere von  $x = 0$  bis  $x$ , sowie von  $u(0) = a$  bis  $u(x)$ :

$$x = \int_a^{u(x)} \left( \left( \frac{s}{a} \right)^2 - 1 \right)^{-1/2} ds = a \operatorname{Arcosh} \frac{u(x)}{a}.$$

Auflösen nach  $u(x)$  ergibt  $u(x) = a \cosh \frac{x}{a}$ . Diese Kurve beschreibt gleichzeitig die Gestalt einer hängenden Kette, deshalb heißt sie Kettenlinie oder Katenoid. Die zugehörige Rotationsfläche ist das Katenoid, es ist ein Beispiel für eine Minimalfläche.

## 28 Kurvenintegrale und Gradientenfelder

Beim einer Radtour vom Mathematischen Institut auf den Schauinsland wird Arbeit gegen die Gravitationskraft verrichtet. Es ist dabei egal, welcher Weg gewählt wird: die Gravitationskraft zeigt konstant nach unten, daher entspricht die Arbeit einfach dem Zugewinn an Höhe bzw. Lageenergie. Felder mit einem solchen Erhaltungsgesetz heißen konservativ. Wir wollen notwendige und hinreichende Bedingungen angeben, die konservative Felder charakterisieren.

Die Regel zur Berechnung der Arbeit lautet *Kraft längs Weg*. Wir betrachten die Klasse  $PC^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  der stückweise  $C^1$ -Wege  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , das heißt  $\gamma$  ist stetig und es gibt eine Unterteilung  $a = t_0 < \dots < t_N = b$  mit  $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \in C^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{R}^n)$ .

**Definition 28.1 (Kurvenintegral)** Sei  $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Das Kurvenintegral von  $F$  längs  $\gamma \in PC^1([a, b], \Omega)$  ist

$$\int_{\gamma} F \cdot dx := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

In der Physik steht  $F(x)$  für ein Kraftfeld und  $dx$  wird als vektorielles Wegelement bezeichnet. Die Notation ist jedoch rein symbolisch, zur Berechnung des Kurvenintegrals ist nur das Riemannintegral auf der rechten Seite relevant. Dabei ist die Merkregel nützlich, dass  $dx$  durch  $\gamma'(t) dt$  zu ersetzen ist.

**Lemma 28.1** Das Kurvenintegral hat folgende Eigenschaften:

(a) *Linearität:* sind  $F_{1,2} \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^2)$  und  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ , so gilt für  $\gamma \in PC^1([a, b], \Omega)$

$$\int_{\gamma} (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) \cdot dx = \lambda_1 \int_{\gamma} F_1 \cdot dx + \lambda_2 \int_{\gamma} F_2 \cdot dx.$$

(b) *Additivität bei Zerlegungen:* ist  $\gamma \in PC^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  und  $a = t_0 < \dots < t_N = b$  eine beliebige Zerlegung von  $[a, b]$ , so folgt mit  $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$

$$\int_{\gamma} F \cdot dx = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} F \cdot dx.$$

(c) *Invarianz bei Umparametrisierungen:* sei  $\gamma \in PC^1(I_1, \mathbb{R}^2)$  und  $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$  sei diffeomorph. Dann gilt, je nach Vorzeichen von  $\varphi'$ ,

$$\int_{\gamma \circ \varphi} F \cdot dx = \pm \int_{\gamma} F \cdot dx.$$

BEWEIS: (a) und (b) folgen aus der Definition und den Eigenschaften des Riemannintegrals. Für (c) sei  $I_1 = [a_1, b_1]$  und  $I_2 = [a_2, b_2]$ . Mit der Substitution  $\varphi(t) = s$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} F \cdot dx &= \int_{a_2}^{b_2} \langle (F \circ \gamma \circ \varphi)(t), (\gamma \circ \varphi)'(t) \rangle dt \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \langle F \circ \gamma(\varphi(t)), \gamma'(\varphi(t)) \rangle \varphi'(t) dt \\ &= \int_{\varphi(a_2)}^{\varphi(b_2)} \langle (F \circ \gamma)(s), \gamma'(s) \rangle ds. \end{aligned}$$

Ist  $\varphi' > 0$  so gilt  $\varphi(a_2) = a_1$  und  $\varphi(b_2) = b_1$ , wir bekommen das Pluszeichen. Ist  $\varphi' < 0$  so sind die Grenzen vertauscht und es gilt das Minuszeichen.  $\square$

**Definition 28.2 (konservatives Feld)** Ein Vektorfeld  $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, heißt konservativ oder Gradientenfeld, wenn es eine Funktion  $\varphi \in C^1(\Omega)$  gibt mit

$$F = \text{grad } \varphi \quad \Leftrightarrow \quad F_i = \partial_i \varphi \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Die Funktion  $\varphi$  heißt Stammfunktion oder Potential von  $F$ .

*Hinweis.* In der Physik ist die Wahl  $F = -\text{grad } \varphi$  üblich.

**Beispiel 28.1 (Gravitationsfelder)** In folgenden Beispielen gilt  $F = -\text{grad } \varphi$ :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 & F(x) &= -Ce_3 & \varphi(x) &= Cx_3 \\ F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 & F(x) &= C \frac{x}{|x|^3} & \varphi(x) &= \frac{C}{|x|}. \end{aligned}$$

Das erste Feld beschreibt approximativ die Gravitation nahe der Erdoberfläche, das zweite ist das Gravitationsfeld eines beliebigen, rotationssymmetrischen Körpers, nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz.

**Lemma 28.2 (Eindeutigkeit der Stammfunktion)** Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und zusammenhängend, so ist eine Stammfunktion von  $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$  eindeutig bestimmt (wenn existent), bis auf eine additive Konstante.

BEWEIS: Sind  $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(\Omega)$  Stammfunktionen von  $F$ , so folgt

$$\text{grad}(\varphi_2 - \varphi_1) = \text{grad } \varphi_2 - \text{grad } \varphi_1 = F - F = 0.$$

Also ist  $\varphi_2 - \varphi_1$  konstant nach Satz 19.1, das heißt  $\varphi_2 = \varphi_1 + c$ .  $\square$

Wir zeigen jetzt, dass Existenz einer Stammfunktion und Wegunabhängigkeit äquivalent sind.

**Satz 28.1 (Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und zusammenhängend. Für ein Vektorfeld  $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a)  $F$  ist ein Gradientenfeld.
- (b) Für jede geschlossene  $PC^1$ -Kurve in  $\Omega$  ist  $\int_{\gamma} F \cdot dx = 0$ .
- (c) Für zwei  $PC^1$ -Kurven in  $\Omega$  mit gleichen Anfangs- und Endpunkten ist

$$\int_{\gamma_0} F \cdot dx = \int_{\gamma_1} F \cdot dx.$$

BEWEIS: Ist  $F = \text{grad } \varphi$  in  $\Omega$ , so gilt nach Kettenregel für alle  $\gamma \in PC^1([a, b], \Omega)$

$$(28.1) \quad \int_{\gamma} F \cdot dx = \int_a^b \langle \text{grad } \varphi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t) dt = [\varphi(x)]_{x=\gamma(a)}^{x=\gamma(b)}.$$

Das Integral ist also gleich für zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt; für geschlossene Wege ist es Null.

Für (b)  $\Rightarrow$  (c) seien  $\gamma_i \in PC^1([a_i, b_i], \Omega)$ ,  $i = 1, 2$ , mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. Dann ist

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & a_1 \leq t \leq b_1 \\ \gamma_2(b_1 + b_2 - t) & b_1 \leq t \leq b_1 + b_2 - a_2 \end{cases}$$

geschlossen und stückweise  $C^1$ , und aus (b) ergibt sich mit Lemma 28.1

$$0 = \int_{\gamma} F \cdot dx = \int_{\gamma_1} F \cdot dx - \int_{\gamma_2} F \cdot dx.$$

Für (c)  $\Rightarrow$  (a) sei  $x_0 \in \Omega$  fest. Zu  $x \in \Omega$  wählen wir  $\gamma_x \in PC^1([0, 1], \Omega)$  mit  $\gamma_x(0) = x_0$  und  $\gamma_x(1) = x$ , siehe Satz 19.2(2) für die Existenz von  $\gamma$ . Wäre  $\varphi$  Stammfunktion von  $F$  mit  $\varphi(x_0) = 0$ , so folgt aus (28.1)

$$(28.2) \quad \varphi(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot dx.$$

Umgekehrt definieren wir  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  durch (28.2) und zeigen, dass dies eine Stammfunktion liefert. Zu  $x \in \Omega$  sei  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ . Wir erhalten eine  $PC^1$ -Kurve von  $x_0$  nach  $x + he_j$ ,  $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , indem wir  $\gamma_x$  zusammensetzen mit

$$c : [0, 1] \rightarrow B_\varepsilon(x), \quad c(t) = x + the_j.$$

Nach Voraussetzung (c) und Lemma 28.1 gilt für  $h \neq 0$

$$\frac{\varphi(x + he_j) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_c F \cdot dx = \int_0^1 \langle F(x + the_j), e_j \rangle dt \rightarrow F_j(x) \quad \text{mit } h \rightarrow 0.$$

Also gilt  $\partial_j \varphi = F_j$  für  $j = 1, \dots, n$ . □

Die folgende Bedingung ist offensichtlich notwendig für die Existenz einer Stammfunktion.

**Satz 28.2 (Rotationsfreiheit von Gradientenfeldern)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Ist  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  ein Gradientenfeld, so gilt für alle  $i, j = 1, \dots, n$

$$\partial_i F_j = \partial_j F_i \quad \text{in } \Omega.$$

BEWEIS: Ist  $F = \text{grad } \varphi$ , so folgt  $\varphi \in C^2(\Omega)$  und mit Schwarz, Satz 17.2, gilt

$$\partial_i F_j = \partial_i \partial_j \varphi = \partial_j \partial_i \varphi = \partial_j F_i.$$

□

Für  $n = 3$  lässt sich die Bedingung schreiben als  $\text{rot } F = 0$ , wobei

$$\text{rot } F = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1).$$

**Beispiel 28.2**  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y) = (-y, x)$ , hat auf keiner offenen Teilmenge eine Stammfunktion, denn es gilt  $\partial_1 F_2 = 1$ , dagegen  $\partial_2 F_1 = -1$ .

Das folgende Beispiel ist aber interessant.

**Beispiel 28.3 (Winkelvektorfeld)** Wir betrachten

$$W : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, W(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Die notwendige Bedingung aus Satz 28.2 ist erfüllt, es gilt

$$\partial_1 W_2 = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_2 W_1.$$

Für  $y > 0$  hat  $W(x, y)$  als Stammfunktion den Winkel mit der  $x$ -Achse

$$\varphi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \rightarrow (0, \pi), \varphi(x, y) = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Um das nachzurechnen, verwende  $\varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) = \theta$  und die Kettenregel:

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta), (\cos \theta, \sin \theta) \rangle &= \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0, \\ \langle \text{grad } \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta), (-r \sin \theta, r \cos \theta) \rangle &= \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) = 1. \end{aligned}$$

Wegen  $W(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1}{r}(-\sin \theta, \cos \theta)$  gilt ebenfalls

$$\begin{aligned} \langle W(r \cos \theta, r \sin \theta), (\cos \theta, \sin \theta) \rangle &= 0, \\ \langle W(r \cos \theta, r \sin \theta), (-r \sin \theta, r \cos \theta) \rangle &= 1. \end{aligned}$$

Betrachte nun eine Kurve  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  in Polardarstellung, also  $\gamma(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$  mit  $r, \theta \in C^1(I)$ . Wir berechnen

$$(28.3) \quad \int_{\gamma} W \cdot dx = \int_a^b \left\langle \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, r' \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + r \theta' \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle dt = \theta(b) - \theta(a).$$

Speziell sei  $\gamma(t) = (\cos nt, \sin nt)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , mit  $n \in \mathbb{Z}$ . Dann ist  $\gamma$  geschlossen und es gilt

$$(28.4) \quad \int_{\gamma} W \cdot dx = 2\pi n \quad (\neq 0 \text{ für } n \neq 0).$$

Mit Satz 28.1 folgt, dass  $W$  keine Stammfunktion auf ganz  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  hat.

Das Beispiel zeigt, dass die Rotationsfreiheit eines Vektorfelds, siehe Satz 28.2, nicht hinreichend ist für die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals. Es stellt sich die Frage, ob das Kurvenintegral zumindest gleich bleibt, wenn eine Kurve stetig deformiert wird.

**Definition 28.3 (Homotopie)** Eine Homotopie in  $\Omega$  zwischen  $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([a, b], \Omega)$  ist eine Abbildung  $\gamma \in C^0([a, b] \times [0, 1], \Omega)$  mit  $\gamma(\cdot, 0) = \gamma_0$  und  $\gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$ . Speziell:

- Homotopie mit festen Endpunkten:  $\gamma(a, t), \gamma(b, t)$  konstant für  $t \in [0, 1]$  (falls  $\gamma_0, \gamma_1$  mit gleichem Anfangs- und Endpunkt)
- geschlossene Homotopie:  $\gamma(a, t) = \gamma(b, t)$  für alle  $t \in [0, 1]$  (falls  $\gamma_0, \gamma_1$  geschlossen).

Im folgenden Lemma berechnen wir die Ableitung des Kurvenintegrals längs Homotopien, sofern diese ausreichend differenzierbar sind.

**Lemma 28.3 (Homotopieformel)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Sei  $\gamma \in C^2([a, b] \times [0, 1], \Omega)$  eine Homotopie, entweder mit festen Endpunkten oder geschlossen. Dann gilt mit  $\gamma_t = \gamma(\cdot, t)$  für  $t \in [0, 1]$

$$(28.5) \quad \int_{\gamma_1} F \cdot dx - \int_{\gamma_0} F \cdot dx = - \int_0^1 \int_a^b \sum_{i,j=1}^n (\partial_i F_j - \partial_j F_i) \circ \gamma \frac{\partial \gamma^i}{\partial s} \frac{\partial \gamma^j}{\partial t} ds dt.$$

Ist  $F$  rotationsfrei, so sind die Kurvenintegrale über  $\gamma_0, \gamma_1$  gleich.

BEWEIS: Durch Differentiation unter dem Integral, Satz 22.2, und partielle Integration bezüglich  $s \in [a, b]$  ergibt sich, zunächst für eine beliebige  $C^2$ -Homotopie,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\gamma_t} F \cdot dx &= \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \langle F(\gamma(s, t), \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t)) \rangle ds \\ &= \int_a^b \langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \rangle ds + \int_a^b \langle F \circ \gamma, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s} \rangle ds \\ &= \int_a^b \langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \rangle ds + \langle F \circ \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \rangle \Big|_{s=a}^{s=b} - \int_a^b \langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \rangle ds. \end{aligned}$$

Der Randterm verschwindet in beiden Fällen:

$$\begin{aligned} \text{feste Endpunkte} &\Rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial t}(a, t) = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t}(b, t) = 0, \\ \text{geschlossen} &\Rightarrow \gamma(a, t) = \gamma(b, t), \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t}(a, t) = \frac{\partial \gamma}{\partial t}(b, t). \end{aligned}$$

Damit ist die Formel bewiesen. □

Wir können an dieser Stelle als Anwendung den Fundamentalsatz der Algebra, Satz 5.11 aus Analysis I, beweisen. Es stellt sich heraus, dass es für die Existenz einer Nullstelle einen geometrischen Grund gibt.

**Satz 28.3 (Fundamentalsatz der Algebra)** Jedes komplexe Polynom vom Grad  $n \geq 1$  hat mindestens eine Nullstelle  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

BEWEIS: Das Winkelvektorfeld  $W : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  aus Beispiel 28.3 erfüllt  $\partial_1 W_2 = \partial_2 W_1$ . Sei  $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$  mit  $a_i \in \mathbb{C}$  und  $n \geq 1$ . Schreibe  $p(z) = p_n(z) + q(z)$  mit  $p_n(z) = z^n$ . Betrachte nun die Homotopie

$$\gamma : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(\theta, t) = p_n(Re^{i\theta}) + t q(Re^{i\theta}).$$

Wir haben  $\gamma_0(\theta) = (Re^{i\theta})^n$  und  $\gamma_1(\theta) = p(Re^{i\theta})$ . Die Homotopie geht a priori nach  $\mathbb{R}^2$ , aber  $q(z)$  hat Grad höchstens  $n-1$ , daher ist  $|q(Re^{i\theta})| \leq \frac{1}{2}R^n$  für  $R > 0$  hinreichend groß. Es folgt

$$|\gamma(\theta, t)| \geq |p_n(Re^{i\theta})| - |q(Re^{i\theta})| \geq R^n - \frac{1}{2}R^n > 0.$$

Mit Lemma 28.3 und Beispiel 28.3 gilt

$$\int_{\gamma_1} W \cdot dx = \int_{\gamma_0} W \cdot dx = 2\pi n.$$

Nun betrachten wir die zweite, ebenfalls glatte Homotopie

$$\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \times [0, R] \rightarrow \mathbb{R}^2, \tilde{\gamma}(\theta, \varrho) = p(\varrho e^{i\theta}).$$

Hätte  $p(z)$  keine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ , so wäre dies eine Homotopie in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  zwischen  $\tilde{\gamma}_R(\theta) = p(Re^{i\theta}) = \gamma_1(\theta)$  und der konstanten Kurve  $\tilde{\gamma}_0(\theta) = p(0)$ . Wieder mit Lemma 28.3 folgt

$$\int_{\gamma_1} W \cdot dx = \int_{\tilde{\gamma}_0} W \cdot dx = 0,$$

ein Widerspruch. □

Wir kommen nun auf das Problem der Wegunabhängigkeit, bzw. äquivalent der Existenz einer Stammfunktion, zurück. Beispiel 28.3 weist darauf hin, dass es neben der Rotationsfreiheit des Vektorfeldes auch auf das Gebiet  $\Omega$  ankommt.

**Definition 28.4** Eine Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve  $\gamma \in C^0([a, b], \Omega)$  in  $\Omega$  geschlossen homotop zu einer konstanten Kurve ist.

**Beispiel 28.4** Eine Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  heißt sternförmig, wenn es ein  $x_0 \in \Omega$  gibt mit

$$(1-t)x + tx_0 \in \Omega \quad \text{für alle } x \in \Omega, t \in [0, 1].$$

Eine sternförmige Menge ist einfach zusammenhängend, denn jede geschlossene Kurve  $\gamma_0 \in C^0([a, b], \Omega)$  ist homotop zur konstanten Kurve in  $x_0$ , durch die Homotopie

$$\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega, \gamma(s, t) = (1-t)\gamma_0(s) + tx_0.$$

**Satz 28.4 (Stammfunktion)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Es gelte

- (a) Für alle  $i, j = 1, \dots, n$  ist  $\partial_i F_j = \partial_j F_i$  auf  $\Omega$ .
- (b)  $\Omega$  ist einfach zusammenhängend.

Dann gibt es auf  $\Omega$  eine Stammfunktion zu  $F$ .

Der Beweis ist im Prinzip klar: nach Satz 28.1 reicht es zu zeigen, dass das Kurvenintegral längs jeder geschlossenen  $PC^1$ -Kurve  $\gamma$  gleich Null ist. Nach Voraussetzung ist aber  $\gamma$  homotop zu einer konstanten Kurve. Wegen  $F$  rotationsfrei ist das Kurvenintegral längs der Homotopie konstant nach Lemma 28.3, und damit gleich Null wie verlangt.

Es gibt eine technische Komplikation. Die Homotopie von  $\gamma$  zur konstanten Kurve muss nach Definition 28.3 nur stetig sein. Das Kurvenintegral längs  $\gamma_t = \gamma(\cdot, t)$  ist damit nicht definiert, außer für  $t = 0, 1$ . Erst recht kann die Homotopieformel nicht angewandt werden. Um das zu umgehen, ersetzen wir die  $\gamma_t$  durch stückweise lineare Kurven und verwenden affin-lineare Homotopien. Für diese ist die Homotopieformel gültig.

**Lemma 28.4 (affine Homotopie)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  mit  $\partial_i F_j = \partial_j F_i$  auf  $\Omega$  für  $1 \leq i, j \leq n$ . Betrachte eine affine Homotopie

$$\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega, \gamma(s, t) = (1-t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s).$$

Dabei seien  $\gamma_{0,1} \in PC^1([a, b], \Omega)$  mit Randbedingungen

$$\gamma_0(a) = \gamma_1(a), \gamma_0(b) = \gamma_1(b) \quad \text{oder} \quad \gamma_0(a) = \gamma_0(b), \gamma_1(a) = \gamma_1(b).$$

Dann gilt

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dx = \int_{\gamma_0} F \cdot dx.$$

BEWEIS: Seien zunächst  $\gamma_{0,1}$  von der Klasse  $C^1$ . Wir haben

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s}(s, t) = \gamma_1'(s) - \gamma_0'(s) = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s \partial t}(s, t).$$

Dies reicht für die Rechnung aus Lemma 28.3 aus. Da  $F$  rotationsfrei ist, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\gamma_t} F \cdot dx = \langle F \circ \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \rangle \Big|_{s=a}^{s=b}.$$

Seien nun  $\gamma_{0,1}$  nur in  $PC^1$ . Dann gibt es eine Unterteilung  $a = s_0 < \dots, s_N = b$ , so dass  $\gamma_{0,1} \in C^1$  auf jedem Teilintervall  $[s_{k-1}, s_k]$ . Wir wenden die Rechnung auf  $[s_{k-1}, s_k]$  an und addieren. Dabei heben sich alle Randwerte weg, außer für  $s = a, b$ . Diese sind aber Null wegen der Randbedingungen.  $\square$

**Satz 28.5 (Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  mit  $\partial_i F_j = \partial_j F_i$  auf  $\Omega$  für  $1 \leq i, j \leq n$ . Sind dann  $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a, b], \Omega)$  homotop in  $\Omega$  mit festen Endpunkten (oder geschlossen homotop), so gilt

$$\int_{\gamma_0} F \cdot dx = \int_{\gamma_1} F \cdot dx.$$

BEWEIS: Sei  $\gamma \in C^0([a, b] \times [0, 1], \Omega)$  die Homotopie, also  $\gamma(\cdot, 0) = \gamma_0$  und  $\gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$ . Aus Kompaktheitsgründen gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit

$$\text{dist}(\gamma([a, b] \times [0, 1]), \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 2\varepsilon.$$

Da  $\gamma$  auf  $[a, b] \times [0, 1]$  gleichmäßig stetig ist, gibt es weiter ein  $\delta > 0$  mit

$$|\gamma(s, t) - \gamma(s', t')| < \varepsilon \quad \text{für } |s - s'|, |t - t'| < \delta.$$

Wir ersetzen jetzt  $\gamma(\cdot, t)$  durch stückweise lineare Kurven. Seien  $a = s_0 < \dots < s_N = b$  äquidistant gewählt. Wir definieren  $\tilde{\gamma} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$\tilde{\gamma}(s, t) = \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}} \gamma(s_{k-1}, t) + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} \gamma(s_k, t) \quad \text{für } s \in [s_{k-1}, s_k].$$

Es gilt  $\tilde{\gamma}(a, t) = \gamma(a, t)$  und  $\tilde{\gamma}(b, t) = \gamma(b, t)$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Wir behaupten, dass die affine Homotopie zwischen  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  in  $\Omega$  liegt. Für  $s \in [s_{k-1}, s_k]$  haben wir

$$|\tilde{\gamma}(s, t) - \gamma(s, t)| \leq \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}} |\gamma(s_{k-1}, t) - \gamma(s, t)| + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} |\gamma(s_k, t) - \gamma(s, t)| < \varepsilon.$$

Für  $\lambda \in [0, 1]$  folgt daraus die Abschätzung

$$|(1 - \lambda)\gamma(s, t) + \lambda\tilde{\gamma}(s, t) - \gamma(s, t)| = \lambda|\tilde{\gamma}(s, t) - \gamma(s, t)| < \varepsilon,$$

und die Behauptung folgt. Als zweites zeigen wir, dass für  $|t - t'| < \delta$  die affine Homotopie zwischen  $\tilde{\gamma}(\cdot, t)$  und  $\tilde{\gamma}(\cdot, t')$  ebenfalls in  $\Omega$  liegt. Und zwar gilt für  $s \in [s_{k-1}, s_k]$

$$|\tilde{\gamma}(s, t) - \tilde{\gamma}(s, t')| \leq \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}} |\gamma(s_{k-1}, t) - \gamma(s_{k-1}, t')| + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} |\gamma(s_k, t) - \gamma(s_k, t')| < \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich für  $\mu \in [0, 1]$

$$|(1 - \mu)\tilde{\gamma}(s, t) + \mu\tilde{\gamma}(s, t') - \gamma(s, t)| \leq |\tilde{\gamma}(s, t) - \gamma(s, t)| + \mu |\tilde{\gamma}(s, t) - \tilde{\gamma}(s, t')| < 2\varepsilon.$$

Sei nun  $N \in \mathbb{N}$  mit  $1/N < \delta$  gewählt. Dann folgt mit Lemma 28.4

$$\int_{\gamma_0} F \cdot dx = \int_{\tilde{\gamma}_0} F \cdot dx \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_1} F \cdot dx = \int_{\tilde{\gamma}_1} F \cdot dx, \quad \text{sowie}$$

$$\int_{\tilde{\gamma}_{t_j}} F \cdot dx = \int_{\tilde{\gamma}_{t_{j-1}}} F \cdot dx \quad \text{für } t_j = \frac{j}{N} \text{ mit } j = 1, \dots, N.$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Folgende Tabelle fasst unsere Ergebnisse zum Kurvenintegral zusammen:

$F$ Gradientenfeld	Satz 28.1 $\iff$	$\int F \cdot dx$ wegunabhängig
$\Downarrow$ Satz 28.2	$\Uparrow$ 1-fach zshg. Satz 28.4 $\Uparrow$	$\Downarrow$ (klar)
$F$ rotationsfrei	Satz 28.5 $\iff$	$\int F \cdot dx$ homotopieinvariant

Die Implikation von rechts nach links in der unteren Zeile folgt leicht aus der Homotopieformel, Lemma 28.3, und dem Fundamentallema der Variationsrechnung. Abstrakt aber nicht exakt kann die Sache so gesehen werden: für ein gegebenes Vektorfeld  $F$  ist das Kurvenintegral ein Funktional  $\mathcal{F}$  auf dem Raum  $X$  der geschlossenen Kurven in  $\Omega$ . Nach Lemma 28.3 ist die Ableitung dieses Funktionals gleich

$$D\mathcal{F}(\gamma)\phi = - \int_a^b \langle (DF - DF^T) \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \phi \rangle ds.$$

$F$  rotationsfrei bedeutet, dass diese Ableitung gleich Null ist. In Konsequenz ist  $\mathcal{F}$  konstant auf den (Weg-)Komponenten von  $X$ , den Homotopieklassen. Rigoros wird das in Satz 28.5 bewiesen. Ist  $\Omega$  einfach zusammenhängend, das heißt die Homotopieklasse der konstanten Kurven ist die einzige Komponente, so ist  $\mathcal{F}$  identisch Null. Dann existiert eine Stammfunktion, wie in Satz 28.1 gezeigt.