Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2017, Blatt 4
Prof. Dr. G. Wang — 29.05.2017
Dr. Ch. Ketterer

Aufgabe 1 *(Schrankensatz)* (2+2 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Schrankensatz.

(b) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^1(I, \mathbb{R})$ eine Funktion mit beschränkter Ableitung. Beweisen Sie, dass f Lipschitzstetig ist.

Aufgabe 2 *(Konvexe Mengen)* (2+2 Punkte)

(a) Definieren Sie den Begriff *konvexe Menge des* $\mathbb{R}^n$.

(b) Ist jede konvexe Menge des $\mathbb{R}^n$ wegweise zusammenhängend? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 *(Kritische Punkte)* (2+2 Punkte)

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C^1(\Omega)$. Definieren Sie den Begriff *kritischer Punkt von* f.

(b) Sei $x \in \Omega$ ein kritischer Punkt von f. Liegt in x notwendigerweise ein lokales Extremum von f? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 *(Lokale Extrempunkte)* (2+2 Punkte)

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(\Omega)$. Was ist ein hinreichendes Kriterium für die Aussage *f hat ein lokales Maximum in* $x \in \Omega$.

(b) Finden Sie alle lokalen Maxima der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = -x^2 - y^2$.

Aufgabe 5 *(Hesse Matrix)* (2+2 Punkte)

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(\Omega)$. Definieren Sie den Begriff *Hesse Matrix von f an der Stelle* $x \in \Omega$.

(b) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 - y^2$. Berechnen Sie die Hesse Matrix von f an der Stelle $(0, 0)$.

Aufgabe 6 *(Konstanz-Satz)* (2+2 Punkte)

(a) Was besagt der Konstanz-Satz?

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(\Omega)$ mit $D^2 f(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$. Ist f konstant? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7 *(Taylor-Polynom)* (2+2 Punkte)

(a) Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^k((a, b))$. Definieren Sie den Begriff Taylorpolynom der Ordnung k mit Entwicklungspunkt x_0.

(b) Sei $f(x) = \sin x$. Berechnen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 3 von f am Entwicklungspunkt 0.