Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2017, Serie 1
Prof. Dr. G. Wang — 24.4.2017
Dr. Ch. Ketterer

Aufgabe 1 *(Metrik)* (4 Punkte)
Es sei X die Menge aller reeller Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} =: (a_n)$.
(a) Man zeige, dass durch

$$d((a_n),(b_n)) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|} \quad ((a_n),(b_n) \in X)$$

eine Metrik auf X definiert wird.
(b) Sei $a_n = (a_{n,j})_{j\in\mathbb{N}} \in X$ eine Folge von Folgen und sei $b = (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in X$. Zeigen Sie, dass a_n genau dann bzgl. der Metrik d gegen b konvergiert, d.h. $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b) = 0$, wenn für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_{n,j} = b_j$.

Aufgabe 2 *(Offene und abgeschlossene Teilmengen)* (4 Punkte)
(a) Die auf $\mathbb{R}^n$ definierte 1-Norm und Maximumsnorm sind definiert durch

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$

Finden Sie die offenen Kugeln $B_1(0)$ für die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$.
(b) Es sei X eine beliebige Menge. Dann wird durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

auf X eine Metrik definiert (d heißt *triviale Metrik* auf X). Man zeige, dass jede Teilmenge von X bzgl. dieser Metrik zugleich offen und abgeschlossen ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Es sei X ein metrischer Raum und A, B zwei Teilmengen von X. Man zeige folgende Aussagen:
(a) $(\operatorname{int} A) \cap (\operatorname{int} B) = \operatorname{int}(A \cap B)$,
(b) $(\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{int} B) \subset \operatorname{int}(A \cup B)$. Gilt i.a. auch Gleichheit?

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Man prüfe, ob f in $(0,0)$ stetig ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Di, 2.5.2017 bis 12:00**.