Aufgabe 1 *(Metrik)* (4 Punkte)
Es sei X die Menge aller reeller Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} =: (a_n)$.
(a) Man zeige, dass durch

$$d((a_n),(b_n)) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \frac{|a_i - b_i|}{1+|a_i-b_i|} \quad ((a_n),(b_n) \in X)$$

eine Metrik auf X definiert wird.

Lösung:

(i) $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(ii) Z.z.: $d((a_n),(b_n)) = 0 \;\Leftrightarrow (a_n) = (b_n)$.
"$\Leftarrow$": $(a_n) = (b_n) \;\Leftrightarrow\; a_n = b_n \;\forall n \in \mathbb{N} \;\Leftrightarrow\; \frac{|a_n-b_n|}{1+|a_n-b_n|}$
$\Rightarrow d((a_n),(b_n)) = 0$.

"$\Rightarrow$": $d((a_n),(b_n)) = 0 \;\Rightarrow 0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|} \geq \frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|} \;\Rightarrow a_i = b_i \;\forall i \in \mathbb{N}$.

(iii) Symmetrie folgt aus der Symmetrie von $|a_i - b_i|$.

(iv) Δ-Ungleichung folgt wegen der Monotonie Eigenschaft absolute konvergenter Reihen aus Δ-Ungleichung für $\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}$. Diese folgt wiederum aus der Aussage: $x \leq y + z$ für $x, y, z \geq 0$ impliziert $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z}$.
Beweis der letzten Aussage:

$$\frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + 1 \geq \frac{1}{y+z} + 1 = \frac{1+z+y}{z+y} \;\Rightarrow\; \frac{z}{1+z} + \frac{y}{1+y} \geq \frac{z}{1+z+y} + \frac{y}{1+y+z} \geq \frac{1+x}{x}.$$

(b) Sei $a_n = (a_{n,j})_{j\in\mathbb{N}} \in X$ eine Folge von Folgen und sei $b = (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in X$. Zeigen Sie, dass a_n genau dann bzgl. der Metrik d gegen b konvergiert, d.h. $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b) = 0$, wenn für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_{n,j} = b_j$.

Lösung:

Def.: $(a_n) = (a_{n,i})_{i\in\mathbb{N}} \in X$ konvergiert gegen $b = (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$ bzgl. d falls $\forall \epsilon > 0 \;\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_\epsilon$: $d((a_n), b) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \frac{|a_{n,i}-b_i|}{1+|a_{n,i}-b_i|} < \epsilon$.

"$\Rightarrow$": Zu zeigen: $(a_{n,i}) \to b_i$ falls $n \to \infty$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Sei $\bar{\epsilon} > 0$ beliebig. Wähle $\epsilon > 0$ so dass $\epsilon = \frac{\bar{\epsilon}}{1+\bar{\epsilon}}$, also $\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$.
Falls $(a_n) \in X$ bzgl d gegen $b = (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$ konvergiert, wählen wir zu ϵ eine natürliche Zahl $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ wie in der Definition oben.
Dann folgt für beliebiges $i \in \mathbb{N}$, dass

$$\frac{|a_{n,i} - b_i|}{1+|a_{n,i}-b_i|} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \frac{|a_{n,i}-b_i|}{1+|a_{n,i}-b_i|} < \epsilon \;\forall n \geq n_\epsilon$$

Daraus folgt $|a_{n,i} - b_i| < \frac{\epsilon}{1-\epsilon} = \bar{\epsilon} \;\; \forall n \geq n_\epsilon =: n_{\bar{\epsilon}}$. $\Rightarrow (a_{n,i}) \to b_i$ falls $n \to \infty$.

"$\Leftarrow$" Wir nehmen an, dass $(a_{n,i}) \to b_i$ für $n \to \infty \; \forall i \in \mathbb{N}$.
Nach Definition bedeutet das: $\forall \epsilon > 0 \; \forall i \in \mathbb{N} \; \exists n_{\epsilon,i} \in \mathbb{N}$: $|a_{n,i} - b_i| < \epsilon \; \forall n \geq n_{\epsilon,i}$.
Man beachte $n_{\epsilon,i}$ hängt von $i \in \mathbb{N}$ ab.

Z.z.: (a_n) konvergiert bzgl d gegen $b \in X$ (siehe Definition oben).
Wir wählen ein beliebigs $\epsilon > 0$.

Da die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}}$ konvergiert, existiert $I_\epsilon \in \mathbb{N}$ so dass $\sum_{i=I_\epsilon+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} < \epsilon/2$.

Außerdem konvergieren nach Annahme $(a_{n,i})$ gegen b_i für alle $i \in \{0, \ldots, I\}$. Also finden wir zu $\hat{\epsilon} = \frac{\bar{\epsilon}}{1+\bar{\epsilon}}$ mit $\bar{\epsilon} := \hat{\epsilon}/2(I_\epsilon + 1)$ natürliche Zahlen $n_{\hat{\epsilon},i}$ wie oben, so dass $|a_{n,i} - b_i| < \hat{\epsilon}$ für alle $n \geq n_{\hat{\epsilon},i}$. Insbesondere impliziert die Wahl von $\hat{\epsilon}$ dass $\frac{|a_{n,i}-b_i|}{1+|a_{n,i}-b_i|} < \bar{\epsilon}$.

Da $I_\epsilon < \infty$, setzen wir $n_\epsilon = \max_{i=1,\ldots,I_\epsilon} n_{\epsilon,i}$. Damit folgt für alle $n \geq n_\epsilon$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \frac{|a_{n,i} - b_i|}{1 + |a_{n,i} - b_i|} &= \sum_{i=0}^{I_\epsilon} \frac{1}{2^{i+1}} \frac{|a_{n,i} - b_i|}{1 + |a_{n,i} - b_i|} + \sum_{i=I_\epsilon+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \frac{|a_{n,i} - b_i|}{1 + |a_{n,i} - b_i|} \\
&\leq \sum_{i=0}^{I_\epsilon} \frac{1}{2^{i+1}} \bar{\epsilon} + \sum_{i=I_\epsilon+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \\
&\leq \sum_{i=0}^{I_\epsilon} \epsilon/2(I_\epsilon + 1) + \epsilon/2 \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Das ist die Behauptung.