Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2017, Serie 2
Prof. Dr. G. Wang — 2.5.2017
Dr. Ch. Ketterer

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)

(a) Es sei A eine abgeschlossene Teilmenge des metrischen Raumes (X, d) und B eine kompakte, zu A disjunkte Teilmenge von X. Zeigen Sie, dass eine positive Zahl ϵ_0 existiert derart, dass $d(a, b) \geq \epsilon_0$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$.

(b) Geben Sie im $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm ein Beispiel zweier disjunkter und abgeschlossener Mengen A und B an derart, dass zu jedem $\epsilon > 0$ Punkte $a \in A$ und $b \in B$ existieren mit $|a - b| < \epsilon$.

Aufgabe 2 (2+4 Punkte)

(a) *Definition. Ein metrischer Raum (X, d) heißt beschränkt, falls es eine Konstante $C > 0$ mit $d(x, y) \leq C$, $\forall\ x, y \in X$ gibt.*
Zeigen Sie, dass ein metrischer Raum (X, d) genau dann beschränkt ist, wenn es einen Punkt $x_0 \in X$ und eine Konstante $C > 0$ mit $d(x, x_0) \leq C$, $\forall\ x \in X$ gibt.

(b) Es sei X die Menge aller reeller Zahlenfolgen mit der Metrik

$$d((a_n), (b_n)) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|} \quad ((a_n), (b_n) \in X).$$

Zeigen Sie, dass X abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt ist. (vgl. Aufgabe 1, Serie 1).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Man prüfe, ob f in $(0, 0)$ stetig ist.

(b) Existieren $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ im Punkt $(x, y) = (0, 0)$?

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 8.5. bis 12:00**.