Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2017, Serie 3
Prof. Dr. G. Wang — 8.5.2017
Dr. Ch. Ketterer

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Man untersuche, an welchen Stellen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y\sqrt{3x^2 + y^2}$$

(einmal) partiell differenzierbar ist und berechne dort ihre partiellen Ableitungen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Untersuchen Sie das Beispiel der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{falls } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

und zeigen Sie:

(a) f ist eine C^1-Funktion.

(b) Die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existieren in jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$, aber sie besitzten im Nullpunkt verschiedene Werte.

(c) Es gilt mit $z = x + iy$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung $f(x, y) = \frac{1}{4} \frac{Im\, z^4}{|z|^2}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
(a) Berechnen Sie die Jacobimatrix der Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(r, \theta, \phi) := (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\phi).$$

(b) Sei $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2$ der Laplace-Operator. Zeigen Sie, dass die Function $\varphi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} |x|^{2-n} & \text{falls } n > 2, \\ \log|x| & \text{falls } n = 2, \end{cases}$$

eine harmonische Funktion ist, d.h. $\Delta\varphi = 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \text{ und } x \neq 0\}.$$

Weiter sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} e^x - 1, & \text{falls } (x, y) \in M, \\ 0, & \text{falls } (x, y) \notin M \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) f ist in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann partiell differenzierbar, wenn $(x, y) \notin M$ ist.

(b) Die Richtungsableitung $D_v f(0)$ von f in 0 existiert für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$.

(c) Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ und

$$D_v f(0) \neq \langle v, \operatorname{grad} f(0) \rangle.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 15.5. bis 12:00**.