Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2017, Serie 4
Prof. Dr. G. Wang — 15.5.2017
Dr. Ch. Ketterer

Aufgabe 1 (*Wärmeleitungsgleichung*) (4 Punkte)
Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,t) := t^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f,$$

wobei $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ der Laplace-Operator ist und $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \,|\, t > 0\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Definition (Divergenz). Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und $F = (f_1, \cdots f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld (d.h. alle Komponenten seien partiell differenzierbar). Dann heißt die Funktion

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x), \qquad \text{für } x \in \Omega$$

die *Divergenz* des Vektorfeldes F im Punkt $x \in \Omega$. Zeigen Sie:

(1) Für eine C^1 Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{div}(uF) = \langle \operatorname{grad} u, F\rangle + u \operatorname{div} F.$$

(2) Für eine C^2 Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
An welchen Punkten ist f mit

$$f(x;y) := (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $f(0, 0) = 0$ stetig partiell differenzierbar.

Aufgabe 4 (*Eulersche Identität*) (4 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) $f(tx) = t^\alpha f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ (f ist homogen vom Grad).

(2) $Df(x)x = \alpha f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Hinweis. Kettenregel. Betrachten Sie für (2) $\Rightarrow$ (1) die Funktion $g(t) = t^{-\alpha} f(tx)$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 22.5. bis 12:00**.